ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE DER ANALYTISCHEN CURVEN*

VON

EDUARD STUDY

Die Geschichte der Differentialgeometrie weist eine solche Reihe glänzender Namen auf, und sie berichtet über Ergebnisse von so grosser Schönheit — die zudem auch in Vorlesungen des Herrn BIANCHI eine meisterhafte Darstellung gefunden haben — dass man nicht leichthin dem Gedanken Raum geben wird, dass diese Untersuchungen am Ende doch vielleicht noch nicht als befriedigend zu betrachten seien. Indessen hat kein Geringerer als S. LIE bereits darauf hingewiesen, dass für einen Theil der Theorie, nämlich für die grundlegenden Aequivalenzprobleme, † die wahre analytische Basis in der Lehre von den Differentialinvarianten zu suchen sei, die gewöhnlich nicht systematisch abgehandelt werden, deren Theorie LIE selbst aber hinreichend ausgebildet zu haben glaubte. Man kann jedoch in dieser Richtung noch weiter gehen. Schlechthin jeder Lehrsatz der Differentialgeometrie hat zum Gegenstande Eigenschaften von Differentialinvarianten. Wenn daher durch deren systematische Aufstellung das Ganze der Theorie eine breitere Basis erhält, so wird das als ein Gewinn zu erachten sein. Zu wünschen bleibt dabei freilich, dass dann nicht etwa abstracte und rein-formale Entwickelungen einen Raum einnehmen, der zu den thatsächlich zu machenden Anwendungen im Missverhältnisse steht.

Mit der so bezeichneten Tendenz kann nun noch eine andere verbunden werden: Es gilt von der Differentialgeometrie, im Grossen und Ganzen, Dasselbe was auch von anderen geometrischen Disciplinen zu sagen ist, dass nämlich ihre

* Presented to the Society September 10, 1908.

† Jede geometrische Untersuchung muss mit einer *Classification* der zu untersuchenden Figuren Hand in Hand gehen, die allerdings nicht immer vollständig ausgeführt zu werden braucht, und gewöhnlich auch nur theilweise durchgeführt wird. In eine *Classe* kommen zu stehen, oder als *äquivalent* zu betrachten sind, im Sinne irgend einer zu bestimmter Transformationsgruppe gehörigen Art von Geometrie, solche Figuren, die durch Transformationen der Gruppe in einander übergeführt werden können, und also "dieselben" geometrischen Eigenschaften haben, *bei genügender Ausbildung der Terminologie* mit den gleichen Worten beschrieben werden können. Im Falle der Euklidischen Geometrie, auf die sich die classische Theorie bezieht, besteht die genannte Gruppe aus den Euklidischen Bewegungen (im reellen oder complexen Gebiet); jede Classe umfasst alle unter einander congruenten Figuren, und nur solche; der Aequivalenzbegriff fällt also hier (wenigstens im Reellen) zusammen mit dem aus dem Alterthum überlieferten Begriff der (Euklidischen) *Congruenz*.

Grundbegriffe zu verschwommen sind, und dass daher viele Aussagen an Klarheit zu wünschen übrig lassen, einige aber auch durchaus unrichtig sind.*

Die Mehrzahl der Formeln der classischen Differentialgeometrie enthält Symbole, die unter Umständen sinnlos werden können. Man pflegt es dann den Formeln selbst anheimzustellen, wie sie sich zum Beispiel mit dem Verschwinden der Nenner der vorkommenden Brüche abfinden wollen; und auch sonst hält man es vielfach nicht für nöthig, mit ausdrücklichen Worten die in Wirklichkeit gemachten Einschränkungen zu beschreiben. Unterlassungen der Art mögen einzeln als Mängel kaum empfunden werden. Gehäuft und verkettet aber können sie recht störend wirken, können sie zur Formulirung von Lehrsätzen führen, deren Sinn nicht ohne Weiteres vollkommen deutlich ist, und die auf anderen Lehrsätzen beruhen, bei denen die Sache schon ebenso liegt. Von dem Zeitverlust, der hierdurch einem wirklich aufmerksamen Leser verursacht werden kann, wollen wir nicht weiter reden. Ein Gefühl der Beunruhigung aber wird nicht unterdrücken können, wer findet, dass einzelne dieser ungenau abgefassten Lehrsätze wirklich ausserhalb des Bereiches angewendet werden, in dem sie Sinn und Geltung haben.† *Zeigt sich, dass gewisse Irrthümer ihre Quelle in der bezeichneten gewohnheitsmässig geübten Nachlässigkeit haben, so muss die Existenzberechtigung einer Darstellungsform in Frage gezogen werden, die Missverständnisse geradezu herausfordert, und hinter der sich unerlaubte Operationen (namentlich die Division mit der Null) mit Erfolg zu verstecken vermögen.*

Uebrigens handelt es sich keineswegs immer um ein blosses Sich-Gehen-Lassen, um Nachlässigkeiten, die bei einiger Sorgfalt leicht auszubessern sind. Sicher scheint uns vielmehr zu sein, dass gewisse Schwierigkeiten des Stoffs

---

* Der Verfasser hat schon öfter Anlass gehabt, solche Dinge zur Sprache zu bringen: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11 (1902), S. 100; *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1903), Vorrede; Vortrag über das Princip von der Erhaltung der Anzahl, *Verhandlungen des Heidelberger Kongresses* (Leipzig, 1905), S. 388 (abgedruckt auch im Archiv für Mathematik und Physik). — Vgl. ferner die weiterhin zu erwähnende Besprechung von LIE's Invariantentheorie.

† So ist der vermeintliche Beweis des (unrichtigen) Lehrsatzes 27 (S. 221) im Lehrbuch der Curventheorie von G. SCHEFFERS (Leipzig, 1901) lediglich dadurch ermöglicht worden, dass der Umfang des Torsionsbegriffes nicht festgestellt worden ist. Auf einer ähnlichen Unterlassung beruht der (gleichfalls unzutreffende) Lehrsatz auf Seite 263 des BIANCHI'schen Werkes (Deutsche Ausgabe, Leipzig, 1899): In der dort vorhergehenden Untersuchung wird nämlich (wie übrigens schon bei KUMMER) eine gewisse Annahme $\{EG - F^2 \neq 0\}$ "stillschweigend" gemacht, und daher in ihrer Bedeutung als Einschränkung schliesslich übersehen. Ebenso irreleitend ist es, wenn man, wohlwissend dass der Ort der Brennpunkte einer Congruenz gar nicht immer flächenhaft ausgedehnt ist, gleichwohl allgemein von einer Brenn*fläche* der Congruenz redet; und Anderes mehr.

Ein Beispiel, in dem sich die Folgen der gerügten Unterlassungssünden in grossem Maassstabe geltend gemacht haben, ist LIE's Invariantentheorie der continuierlichen Gruppen. Siehe des Verfassers Kritik im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17 (1908), S. 125–142.

nicht richtig eingeschätzt zu werden pflegen. Andernfalls würden nicht ohne Widerspruch der Kritik einige Autoren in einer Art von wissenschaftlichem Uebermut einer ziemlich unfruchtbaren mehr dem Scheine nach als in Wirklichkeit vorhandenen Allgemeinheit zu Liebe auf alle die Vortheile verzichten dürfen, die bei sehr vielen Problemen die Beschränkung auf *analytische* Gebilde mit sich bringt—Vortheile, die natürlich erst dann augenfällig in Erscheinung treten, wenn man wirklich *correcte* Formulierungen mit einander vergleicht.* Auch würde man sonst wohl nicht so oft auf jene andere Allgemeinheit verzichten, deren Bedeutung besonders von LIE in's Licht gesetzt worden ist, nämlich auf die (systematische) Uebertragung einer Reihe von Grundbegriffen auf sogenannte imaginäre Figuren. Denn diese Erweiterung bewirkt da, wo sie möglich ist, öfter eine Vereinfachung, durchweg aber eine Vertiefung des Gedankeninhalts der Theorie.†

In einer kürzeren Untersuchung sich soweit sachgemäss auszudrücken, als es

*Man kann sich den Unterschied beider Standpunkte deutlich machen an den Kriterien für ebene Curven. Handelt es sich um analytische Curven, so hat man eine *nothwendige und hinreichende* Bedingung im identischen Verschwinden einer sogenannten WRONSKI'schen Determinante. Wenn man aber reelle "Curven" durch Functionen mit möglichst wenigen Differentialquotienten definieren will, so werden weitere Bedingungen nöthig, die sich erschöpfend überhaupt nicht werden angeben lassen. Vgl. PEANO, Mathesis, v. 9 (1889), pp. 75, 110 (dem Verfasser unzugänglich), BÔCHER, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 2 (1901), p. 139, CURTISS, Mathematische Annalen, Bd. 65 (1908), S. 282. Wohin würde es führen, wenn diese auf Schritt und Tritt sich darbietenden Schwierigkeiten in einem Lehrbuch der Differentialgeometrie sämmtlich erörtert werden sollten! (Übrigens giebt es ein einfaches und dabei sehr umfassendes Kriterium anderer Art: E. FISCHER, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 13 (1908) S. 40).

Uebrigens ist der übliche Satz, wonach die ebenen Curven identisch sein sollen mit denen von der Torsion Null, auch schon im Falle reeller analytischer Curvenzüge nicht einwandsfrei abgefasst. Man übersieht, dass unter den Curvenbegriff auch die geraden Linien fallen, die eine bestimmte Torsion gar nicht haben. Aber nicht selten wird ja auch schon der Fall nicht ausdrücklich ausgeschlossen, in dem die drei Coordinaten x, y, z gleichzeitig constante Werthe haben, so dass der Punkt unter den Begriff der Curve zu fallen scheint. (So selbst bei BIANCHI, Seite 1.)

†Man vergleiche die Darstellung der Theorie der Minimalflächen bei DARBOUX (*Théorie des surfaces*, I, Paris, 1887), der Ideen von LIE im Ganzen sehr glücklich verwerthet hat, mit dem—freilich viel kürzer gehaltenen—entsprechenden Abschnitte bei BIANCHI. (Deutsche Ausgabe, Kap. 14).

Herr G. SCHEFFERS hat in seinen Lehrbüchern im Wesentlichen den auch von uns empfohlenen Standpunkt eingenommen. Ganz und gar nicht einverstanden aber sind wir mit der Art, wie dieser Autor seinen Curvenbegriff einführt und handhabt. Dass es sich nämlich bei ihm um analytische Curven handelt, kann man nur errathen, wenn man (auf Seite 4 des citierten Werkes) erfährt, dass sich für die betrachteten "Curven" die Existenz einer Bogenlänge "beweisen" lässt, und dass diese Curven, bei denen "die Zeit" als unabhängige Veränderliche fungirt, gelegentlich auch "imaginär" sein können (S. 6). Ausserdem werden durchgängig mit einander verwechselt die Begriffe analytische Curve und in Parameterdarstellung gegebenes Curvenstück; der Begriff der natürlichen Grenze kommt überhaupt nicht vor. Ferner bestehen bei dem genannten Autor auch über die Darstellung der analytischen Curven durch Gleichungen zwischen Punktcoordinaten unhaltbare Vorstellungen (S. 1). Dass dieselben "Curven" bald eindimensionale, bald (im complexen Gebiet) zweidimensionale Gebilde sind, wird ebenfalls nicht gesagt, und die Leser, die der Autor zunächst im Auge gehabt hat, werden es sich schwerlich deutlich machen.

die logischen Mängel der Sprache überhaupt zulassen, ist in vielen Fällen gewiss nicht schwierig. Die Schwierigkeiten wachsen aber schnell, wo es sich um die Gesammtdarstellung eines umfangreichen Gebietes handelt, wenn, wie in der Geometrie, eine grosse Menge von Begriffen auf die mannigfachste Art in einander greifen. Dann wird dem mathematischen Schriftsteller eine anhaltende und vielseitige Anspannung der Aufmerksamkeit und also eine Eigenschaft nöthig, die der moderne Mensch nur selten mit auf die Welt bringt, und die zu erwerben er auch häufig nicht gewillt ist, nämlich *Geduld.* Es genügt dann auch nicht, einen Gedanken nur irgendwie *deutlich* ausgedrückt zu haben, man muss in zweiter Linie auch möglichst *einfache* Formulierungen herzustellen suchen, nicht für einzelne Lehrsätze, sondern für ganze Gruppen von solchen, wenn nicht jede Uebersicht über den ausgedehnten Stoff verloren gehen soll. Es handelt sich dann darum, durch Einführung kurzer Bezeichnungen für Complexe von Begriffen, die zweckmässig gewählt und öfter neu gebildet werden müssen, die Zahl der den Fortschritt des Gedankens hemmenden Ausnahmen nach Möglichkeit zu verringern. Wie schwer das sein kann, zeigen die vielen Fälle, in denen in der Geometrie eine trügerische Einfachheit auf Kosten der Präcision zu Stande gekommen ist. Wer eine solche Aufgabe zu lösen versucht, muss sich ausserdem noch mit der Ueberlieferung, mit der schon vorhandenen manchmal recht bunt zusammengewürfelten Terminologie abfinden: Wo schon zahlreiche und werthvolle Arbeiten vorliegen, da kann man verständiger Weise nicht eine ganz neue Terminologie ersinnen wollen. Mit alledem hat man einen Weg zu beschreiben, an dessen Eingang beinahe die Worte Platz finden könnten, die Dante über das Thor seiner Hölle gesetzt hat. "Das Rechte" zu finden, allen nicht nur eingebildeten, sondern auch wirklichen Bedürfnissen gleichzeitig zu genügen, ist so gut wie unmöglich. Man muss sich zu Compromissen verstehen, und dann wird auch bei bestem Willen das in der Umgrenzung der Verbaldefinitionen stets vorhandene subjective Element sich nicht immer gebührend zurückdrängen lassen. Hierzu kommt noch, dass es bekanntlich überhaupt ungemein schwierig ist, Fehler völlig zu vermeiden, und ferner, dass diesen eine fatale Fruchtbarkeit inne wohnt:* Weitere Gründe, der Darstellung die grösste Sorgfalt zu widmen, insbesondere der Terminologie gehörige Aufmerksamkeit zu schenken, und namentlich Mehrdeutigkeiten peinlichst zu vermeiden; auch Alles was durch Zusammenwirken Vieler entstanden ist, mit besonderem Misstrauen zu betrachten.

Wir erlauben uns, das Gesagte noch durch ein Beispiel zu erläutern, das verhältnissmässig einfach und deshalb ganz durchsichtig ist.

Ueberall findet man die Gleichung

$$\frac{R}{T}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)=0,$$

* Man betrachte das im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von 1908 auf Seite 129 angeführte Beispiel.

in der s einen Werth des Bogens einer "Curve," R und T den Krümmungsradius und den sogenannten Torsionsradius bedeuten, bezeichnet als "die Differentialgleichung der sphärischen Curven." Um nicht schon Gesagtes wiederholen zu müssen, wollen wir annehmen, dass es sich nur um reelle analytische Curvenzüge handele. Da eine Erläuterung nicht hinzugefügt zu werden pflegt, so können dann die citierten Worte streng genommen nur heissen, dass die sphärischen Curven (analytischen Curvenzüge) sämmtlich, aber auch keine anderen, der genannten Gleichung Genüge leisten. *Folglich, so müssen wir wohl schliessen, ist ein Kreis keine sphärische Curve*, da ja im Falle $T = \infty$ jene Gleichung keinen Sinn hat, und also auch nicht erfüllt ist.

Müssen wir wirklich so schliessen? Ja, wir sind keineswegs sicher vor dem Einwand: Kein "gutwilliger Leser" werde doch eine solche Folgerung ziehen wollen! Also muss es wohl auch gesagt werden, dass die indirekte Beweismethode, die reductio ad absurdum, kein Bürgerrecht in der Wissenshaft haben würde, wenn man gegenüber bedenklichen Behauptungen es erst abwarten müsste, ob Jemand in gutem Glauben verkehrte Folgerungen daraus ableiten wird. Wir werden uns auch auf böswillige Leser einrichten müssen, und da ist es wohl das Beste, einfach zuzugestehen, dass auch hier eines jener kleinen Versehen vorliegt, die, sobald sie einmal in einem Lehrbuch gestanden haben, mit Sicherheit auch in jedem späteren zu finden sein werden. Andererseits handelt es sich gewiss nur um ein *kleines* Versehen, aus dem bedenklichere Folgen *bis jetzt* nicht hervorgegangen zu sein scheinen. Wir wollen nun aber einmal den Fall setzen, dass trotzdem irgend ein Mathematiker daran Anstoss nehme. Was für Ueberlegungen würde dieser sonderbare Heilige anzustellen haben?

Das Nächstliegende würde sein, die Beschränkung auf unebene Curven ausdrücklich zu stipulieren. Das würde immer da ausreichen, wo man die angeführte Gleichung als ein Kriterium verwenden wollte. *Zugleich würde aber darin das Eingeständniss liegen, dass man eine ganz elementare Frage nicht vollständig beantwortet hat:* Welches ist denn nun "die Differentialgleichung der sphärischen Curven?" Es giebt doch wohl eine Differentialgleichung vierter Ordnung, der alle sphärischen Curven, auch die Kreise, Genüge leisten! Man könnte freilich auf den Ausweg verfallen, den einmal eingebürgerten Terminus durch die Behauptung retten zu wollen, dass die von uns kritisierte Ausdrucksweise ja doch auch im Falle der Kreise noch einen gewissen Sinn habe, dass die Kreise jener Gleichung etwa "uneigentlich genügten." Welche gefährliche Bahn man damit betreten würde, könnte sich ganz erst in verwickelteren Fällen zeigen. Aber man geräth hier schon aus der Scylla in die Charybdis: Denn nunmehr wird es eine offene Frage, ob denn die ebenen Curven in ihrer Gesammtheit sphärisch sind, oder nicht. Und in der That, wenn es eine Differentialgleichung giebt, der alle sphärischen Curven genügen, dann wird man es gar nicht verhindern können, dass deren Grenzfälle, die ebenen

Curven, derselben Gleichung genügen. Ohnehin ist klar, dass beide Arten von Curven zusammen eine einzige Familie, ein analytisches Continuum (von unendlich vielen Dimensionen) bilden. Hier liegt also eine Zusammengehörigkeit vor, *die an sich existiert*, ganz unabhängig von unserem Willen; und eine wohlausgebildete Terminologie wird dieser Natur der Dinge Rechnung tragen müssen. Wollten wir uns nun aber entschliessen, auch alle ebenen Curven schlechthin sphärisch zu nennen, so würden wir auf unerträgliche Art gegen den Sprachgebrauch verstossen. Die eine Aenderung der Terminologie würde eine Menge von Aenderungen nach sich ziehen, und sie würde das Gegentheil einer Vereinfachung bewirken, da der Begriff der unebenen sphärischen Curven ja nun wieder die Kreise nicht umfasst.

So kommen wir schlieslich dahin, erstens neben die besprochene Gleichung eine andere von weiterem Geltungsbereich zu stellen (Nr. 60 der vorliegenden Abhandlung), zweitens, *unter Ausschluss der Kreise*, die ebenen Curven, insofern auch sie sphärisch heissen sollen, durch ein Beiwort auszuzeichnen. Wir nennen sie *uneigentlich-sphärische Curven.* Den Gegensatz zu diesem Begriff bilden dann *die eigentlich-sphärischen Curven*, zu denen alle Kreise und sonst nur unebene reelle Curven gehören. Die unbequeme Folgerung, die man zunächst vielleicht würde ziehen wollen, dass nämlich überall da, wo man bisher von "sphärischen" Curven geredet hat, nun mehr das Wort "eigentlich sphärische Curven" gebraucht werden müsse, ergiebt sich nicht. Wo nämlich *präcise formulierte* Voraussetzungen vorliegen, durch die alle ebenen von Kreisen verschiedenen Curven ausgeschlossen werden, namentlich also, wenn es sich um Curven auf vorgeschriebener Kugel handelt, da wird man auch fernerhin das Wort sphärisch so gebrauchen dürfen, wie es bisher schon üblich war, ohne dass daraus Missverständnisse hervorgehen könnten. Es wird also eine eigentliche Verwickelung nicht entstehen, und es ist schliesslich auch nur ein Vortheil, wenn man eine grössere Zahl unterschiedener Begriffe zur Verfügung hat, nämlich:

Sphärische Curven, Eigentlich-sphärische Curven, Unebene sphärische Curven, Ebene Curven, Uneigentlich-sphärische Curven.

Mutatis mutandis wird schliesslich das Gesagte auch auf andere Worterklärungen Anwendungen finden, so zum Beispiel schon auf die mit den Worten Kreis und Kugel zu verbindenden Begriffe, besonders wo es sich um das complexe Gebiet handelt.

Natürlich sehen wir sehr wohl, dass diese unsere Darlegung im Einzelnen nicht zwingend ist. Es ist aber auch gar nicht unsere Meinung, den Fachgenossen eine bestimmte Terminologie aufzudrängen. Worauf es uns ankommt, ist lediglich, fühlbar zu machen, dass solche "blosse Zweckmässigkeitsfragen," über die man sich bisher sehr wenig Kopfzerbrechens gemacht zu haben scheint, eine ernsthafte Ueberlegung verdienen, wenn man es mit dem Ausdruck der wissenschaftlichen Thatsachen genau nehmen will—(*Wenn!*).

Um nun unserer Kritik eine positive Wendung zu geben, wollen wir wenigstens an einigen umfangreicheren Beispielen zu zeigen versuchen, wie wir uns eine befriedigendere Fassung der Grundbegriffe und der einfachsten Lehrsätze denken, in denen jene Begriffe auftreten. Wir beginnen mit einem der elementarsten Fälle, mit der Differentialgeometrie der analytischen Curven. Diese wollen wir jedoch nicht in ihrem ganzen Umfange aufrollen; wir werden uns vielmehr an ein bestimmtes — übrigens, wie schon bemerkt, im Mittelpunkte der Theorie stehendes — Problem halten, nämlich an die Aufgabe der *Classification der analytischen Curven in der Euklidischen Geometrie des complexen Gebietes* (im gewöhnlichen, also sechsdimensionalen Raume).

Es wird sich dabei einmal um die Darstellung der analytischen Curven durch sogenannte natürliche Gleichungen handeln, die bisher nur in einem sogenannten allgemeinen Falle ausgeführt worden ist, sodann um die Frage nach der Aequivalenz — also hier Congruenz — von gegebenen Curven.

Mit LIE's Ideen berührt sich unsere Ausführung insofern, als sie ganz und gar auf einer Theorie gewisser Differentialinvarianten beruht; im Wesentlichen aber ist hiermit die Uebereinstimmung zu Ende. Unsere Methode wurzelt in der Algebra; den Ausgangspunkt bilden Lehrsätze über Invarianten orthogonaler Transformationen, die der Verfasser früher entwickelt hat, und die, soweit es nötig ist, in § 1 recapitulirt werden. Das vollständige System dieser Invarianten ist umfassender als jenes System, mit dessen Hülfe LIE bereits dasselbe Aequivalenzproblem zu lösen versucht hat. Dass dieser Versuch nicht gelungen ist, und warum er nicht gelingen konnte, haben wir in der erwähnten Kritik nachgewiesen.

Uebrigens werden wir in der Betrachtung von Differentialinvarianten, über die noch Vieles zu sagen wäre, nur so weit gehen, als das Aequivalenzproblem es erfordert, zumal unsere Untersuchung wegen der betrübenden Nothwendigkeit, ganz *ab ovo* anzufangen, ohnehin ziemlich umfangreich ausfallen wird. Das Eingangs entwickelte Programm wird also hier nur theilweise verwirklicht werden. In einer vollständigen Theorie würden auch die von uns nicht verwertheten Begriffe der infinitesimalen Transformation und der Gruppenerweiterung zu ihrem Rechte kommen müssen.

Dass wir für Leser schreiben, denen die in den Lehrbüchern abgehandelte Theorie der (nach unserer Terminologie regulären) Raumcurven nicht fremd ist, und dass wir öfter und Wesentliches aus dem vorhandenen Reichtum schöpfen werden, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Wegen des Grundbegriffs der analytischen Curve können wir, wenn auch auf keines der uns bekannten Lehrbücher, so doch auf einen vortrefflichen Artikel der mathematischen *Encyklopädie* verweisen, über die Begriffe Linie und Fläche, aus der Feder des Herrn v. MANGOLDT. Doch werden wir auch hier, um Missverständnisse sicherer zu vermeiden, das Wichtigste in Erinnerung bringen.

Eine universelle, auf alle erdenklichen Gruppen anwendbare Methode ist die unsrige nicht; eine solche giebt es aber bis jetzt überhaupt nicht, und wenn sie je aufgestellt werden sollte, so würde sie ihre Brauchbarkeit im concreten Falle erst noch zu erweisen haben. Dagegen werden sich in der Euklidischen Geometrie auch bei unbestimmter Dimensionenzahl Betrachtungen ähnlich den unsrigen anwenden lassen, und, mutatis mutandis, zum Beispiel auch in der Nicht-Euklidischen Geometrie oder in der Geometrie der allgemeinen projectiven Gruppe, im letzten Falle allerdings, mit Garantie der Vollständigkeit der aufzustellenden Systeme von Invarianten und Covarianten, vorläufig nur im Falle der Ebene. Auch ist das ganze Verfahren natürlich nicht auf die Theorie der Curven beschränkt. Wir denken noch einige andere Beispiele folgen zu lassen.

§ 1. Bewegungsinvarianten von Vectoren.

Wir betrachten ein System von Vectoren $a, b, c, \cdots$, in endlicher Zahl, mit rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; $\cdots$, die wir als unabhängig-veränderliche Grössen ansehen wollen. Dann ist aus den Elementen bekannt, dass die Verbindungen der Typen

$$(a|b) \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$(abc) \equiv |a_1 b_2 c_3| \qquad \{ \equiv -(acb)\,\text{etc.}\},$$

wozu, im ersten Falle, auch Ausdrücke der Form

$$(a|a) \equiv a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$$

gerechnet werden sollen, (sogenannte absolute) Bewegungsinvarianten sind, dass sie nämlich ihre Werthe nicht ändern, wenn man Anfangs- und Endpunkt eines jeden Vectors derselben (Euklidischen, reellen oder complexen) Bewegung, oder die Componenten dieser Vectoren derselben ternären orthogonalen Transformation unterwirft. Die gleiche Eigenschaft hat dann nothwendig *jede* (nicht nur jede homogene) ganze rationale Function der genannten Grössen. Nennen wir nun *ganze rationale Bewegungsinvariante der Vectoren* $a, b, c, \cdots$ jede ganze rationale Function J der Coordinaten $a_k, b_k, c_k, \cdots$ $(k = 1, 2, 3)$, die nach Ausführung irgend einer Bewegung ihren Werth reproduciert — was durch eine Gleichung der Form

$$J(a_1', a_2', a_3', b_1', \cdots) = J(a_1, a_2, a_3, b_1, \cdots)$$

ausgedrückt wird —, so gilt der Satz, dass mit den ganzen rationalen Functionen der "*elementaren*" Invarianten

$$(a|a),\ (a|b),\ \cdots,\ (b|b),\ (b|c),\ \cdots,\ (abc),\ (abd),\ \cdots$$

bereits *alle* ganzen rationalen Bewegungsinvarianten der — nach Voraussetzung frei-veränderlichen —Vectoren $a, b, c, \cdots$ gefunden sind.* Zufolge dieses (*ersten*) *Fundamentalsatzes der Vector-Analysis*, dessen Kenntniss für das Folgende übrigens nicht unerlässlich ist, hat man bei gewissen Rechnungen nicht nöthig, die Componenten der einzelnen Vectoren überhaupt noch in Betracht zu ziehen; man braucht sie auch in den Formeln nicht zur Erscheinung zu bringen. Dann aber, wenn man also mit den Zeichen $(a|b)$, (abc) selbst rechnen will, ist es natürlich dringend erwünscht, die algebraischen Identitäten *vollständig* zu übersehen, die zwischen den durch eben diese Zeichen dargestellten elementaren Invarianten stattfinden; und das ist in der That bis zu einem gewissen Grade möglich, da diese Relationen sich sämmtlich durch vorgeschriebene Rechnungen aus Formeln der beiden Typen

$$(1)\qquad (bcd)(a|e)-(cda)(b|e)+(dab)(c|e)-(abc)(d|e)\equiv 0,$$

$$(2)\qquad (abc)(def)-|(a|d)(b|e)(c|f)|\equiv 0,$$

zu deren zweitem wir z. B. auch die Identität

$$(abc)^2-|(a|a)(b|b)(c|c)|\equiv 0,$$

zählen wollen, ableiten lassen.†

Für das Folgende wird es genügen, diese Reduction von Identitäten zwischen Bewegungsinvarianten auf "irreducibele" Identitäten in jedem einzelnen Falle auszuführen, was keinerlei Schwierigkeit bietet. Der Leser möge sich die Sache an dem Beispiel

$$(3)\qquad |(a|e)(b|f)(c|g)(d|h)|\equiv 0$$

deutlich machen.

Die Gruppe der Bewegungen ist in umfassenderen Gruppen von Punkttransformationen als invariante Untergruppe enthalten, die sich alle erschöpfend

*Ein Beweis ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Satze in § 58 von CLEBSCH'S *Binären Formen* (Leipzig, 1872), S. 201.

Wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie gilt der Satz nicht mehr, wenn die Coordinaten a_k, b_k u. s. w. nicht unabhängige Veränderliche sind. Trotzdem genügt dort wie hier bei Behandlung des Aequivalenzproblems die Betrachtung der schon bei unabhängig-veränderlichen Argumenten vorhandenen Invarianten, vorausgesetzt nur, dass man das System der zu untersuchenden Figuren einer gewissen Erweiterung unterwirft. Diese Erweiterung besteht hier in der Zufügung *eines* frei-veränderlichen Hülfs-Vectors ω. Vgl. §2.

†Bezeichnet nämlich F irgend eine ganze rationale Function elementarer Invarianten, die identisch verschwindet, und sind Φ und Ψ Ausdrücke der in (1) und (2) linker hand stehenden Gestalt, so ist immer

$$F\equiv\sum\{A\cdot\Phi+B\cdot\Psi\},$$

wo A und B wiederum ganze rationale Functionen elementarer Invarianten sind. Die Umsetzung von F in diese Form erfolgt durch Zufügung von Gliedern, die einander gegenseitig zerstören, ohne dass man dabei den Integritätsbereich der elementaren Invarianten zu verlassen brauchte. Wir bezeichnen diesen Satz als den *zweiten Fundamentalsatz* der Vectoranalysis.

Der Beweis erfolgt genau so wie in des Verfassers *Methoden zur Theorie der ternären Formen*, (Leipzig, 1889) der Beweis eines verwandten Lehrsatzes, (II, §6). Vgl. auch Leipziger Berichte, Bd. 49 (1897), S. 443 und Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), S. 497, wo von ähnlichen Sätzen ein ausgedehnter Gebrauch gemacht wird.

angeben lassen. Wir brauchen hier indessen nur eine einzige dieser Gruppen zu betrachten, die durch Verbindung der Bewegungen mit der Spiegelung am Anfangspunkte der Coordinaten entsteht, die (sogenannte gemischte) *Gruppe der Bewegungen und Umlegungen.* Man übersieht sofort, dass die elementaren Vectorinvarianten des Typus (abc) bei Ausführung irgend einer Umlegung die negative Einheit als Factor annehmen, dass diese *alternierenden* Bewegungsinvarianten also nur sogenannte relative Umlegungsinvarianten sind, dass aber die elementaren *symmetrischen* Bewegungsinvarianten — die des Typus $(a|b)$ —, auch bei den Umlegungen völlig ungeändert bleiben. Umgekehrt ist jede solche ganze rationale Function der Coordinaten a_k, b_k, $\cdots$, also jede ganze rationale absolute Umlegungsinvariante eine ganze rationale Function der elementaren Umlegungsinvarianten $(a|a)$, $(a|b)$, $\cdots$. Diese ganzen rationalen Functionen bilden also einen Unterbereich im Integritätsbereich der ganzen rationalen Bewegungsinvarianten. Jede solche Bewegungsinvariante, die nicht selbst absolute Umlegungsinvariante ist, ist Wurzel einer quadratischen Gleichung mit Coefficienten, die solche sind. Uebrigens lassen sich auch die identischen Relationen zwischen den Umlegungsinvarianten $(a|a)$, $(a|b)$ $\cdots$, also die identisch verschwindenden ganzen rationalen (absoluten) Umlegungsinvarianten von Vectoren erschöpfend angeben: Sie alle lassen sich durch gewisse Rechnungen aus den (im Bereiche der Umlegungsinvarianten "irreducibelen") Identitäten des Typus

$$|(a|e)(b|f)(c|g)(d|h)| \equiv 0 \tag{3}$$

ableiten.*

Die wenigen eingeführten Zeichen sind für unseren ja sehr eng begrenzten Stoff bereits vollkommen ausreichend. Doch ist es bequem, für eine häufig wiederkehrende Verbindung elementarer Invarianten noch ein weiteres Zeichen einzuführen, nämlich

$$(ab|cd) \equiv (a|c)(b|d) - (a|d)(b|c).$$

Es gelten dann, unter Anderem, die identischen Gleichungen

$$(ab|cd) + (bc|ad) + (ca|bd) \equiv 0 \tag{4}$$

und

$$(ab|ab)(ac|ac) - (ab|ac)^2 \equiv (a|a)(abc)^2, \tag{5}$$

deren zweite ebenfalls ein einfaches Beispiel für eine "reducibele" Identität zwischen elementaren Vectorinvarianten ist. — Wie man aus den erklärten Begriffen umfassendere (rationale, algebraische, analytische Bewegungsinvariante) ableiten kann, braucht wohl nicht besonders auseinandergesetzt zu werden.†

Nach dem Gesagten wird es sich für uns um eine Anwendung der sogenannten *Vectoranalysis* handeln. Es mag daher nicht unpassend erscheinen, einige

* Leipziger Berichte, Bd. 49 (1897), S. 445, Lehrsatz III.

† Vgl. des Verfassers *Methoden*, I. Abschnitt.

Worte über diese Methode hinzuzufügen. Ihre Entstehung verdankt sie unseres Erachtens HERMANN GRASSMANN, ungeachtet des Umstandes, dass in HAMILTON's Quaternionentheorie in dem hier in Betracht kommenden Falle des gewöhnlichen Raumes (bei *drei* Vectorcomponenten a_1, a_2, a_3) die Verbindungen $(a|b)$ und (abc) von Vectorcoordinaten ebenfalls vorkommen. $(a|b)$—nach GRASSMANN zu lesen "a in b"—ist nichts Anderes als das "innere Product" der Vectoren a, b, und (abc) das "äussere Product" der Vectoren a, b, c. Das von GRASSMANN ebenfalls eingeführte "äussere Product" von nur zwei Vectoren a, b werden wir in der vorliegenden Arbeit nicht benutzen. Es lässt sich als selbständiger Begriff hier entbehren. Es ist dieses sogenannte Product nämlich ein Vector mit den Componenten

$$a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

das heisst mit Componenten, die Factoren von c_1, c_2, c_3 im Ausdruck (abc) sind, oder es kann wenigstens so gedeutet werden. Man wird daher bei Einführung eines Hülfsvectors c durch (abc), oder, wenn man die Sonderstellung dieses Hülfsvectors durch Gebrauch eines besondern Zeichens ω andeuten will, durch $(ab\omega)$ das genannte System von drei Grössen bereits mit vollkommener Deutlichkeit darstellen können.

Die angeführten Formeln kommen sämmtlich schon bei GRASSMANN vor. Da diese Formeln Specialfälle allgemein gebräuchlicher Lehrsätze der elementaren Determinantentheorie sind, die schon vor GRASSMANN vorhanden war, so wollen wir damit sagen, dass GRASSMANN zuerst den Nutzen besonderer *Zeichen* für die Coordinatenverbindungen $(a|b)$, (abc) und andere der Art erkannt zu haben scheint. Dass freilich bei systematischem Gebrauch dieser Zeichen und der zugehörigen Identitäten (1), (2), (3) ein wohlumschriebener Gedankenkreis sich beherrschen lässt, diese Einsicht findet sich bei GRASSMANN nicht. Soviel wir wissen, fehlt sie aber auch noch in den neuesten Lehrbüchern der Vectoranalysis, deren Verfassern der Gedanke ferne gelegen zu haben scheint, dass die Invariantentheorie mit ihrem Stoffe irgend etwas zu thun haben könnte.

Uebrigens lehrt die Invariantentheorie noch etwas Anderes: Dass nämlich der Gedankenkreis, in dem man diese oder ähnliche Zeichen mit wirklichem Nutzen, wo nicht für die Sache, so doch für die Uebersichtlichkeit der Darstellung verwenden kann, sehr eng umgrenzt ist. Wer solche Zeichen anwenden will, wird gut thun, sich auch deutlich zu machen, wo sie *nicht* am Platze sind.

§ 2. DIFFERENTIALINVARIANTEN, DIFFERENTIALCOVARIANTEN UND INTEGRALINVARIANTEN ANALYTISCHER CURVEN.

In der ganzen folgenden Untersuchung wird ausschliesslich von *analytischen Curven oder Linien* die Rede sein, die zweidimensionale Gebilde sind, und zu denen, wie ausdrücklich bemerkt werden möge, keineswegs alle algebraischen

Curven, sondern nur die sogenannten irreducibelen unter diesen gehören. Der Zusatz "analytisch" kann, als selbstverständlich, hier gelegentlich auch weggelassen werden. Die analytischen Curven sollen ferner von uns nur insoweit betrachtet werden, als sie geometrische Oerter von *eigentlichen* Punkten sind. Insbesondere bleiben von unserer Untersuchung ausgeschlossen alle von sogenannten uneigentlichen Punkten gebildeten "Curven" (wie man sie besonders in der projectiven Geometrie eingeführt hat). Drückt man die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines eigentlichen Punktes x als analytische Functionen eines Parameters t aus, *die einen gemeinsamen Existenzbereich haben* * *und sich nicht sämmtlich auf Constante reducieren*, so erhält man, wenn man t in diesem zweidimensionalen eine RIEMANN'sche Fläche vorstellenden Bereich $\{t\}$ variiren lässt, unter Umständen alle (eigentlichen) Punkte einer analytischen Curve, in der Regel jedoch nur eine Theilmenge dieser Punktmenge — ein *Curvenstück*, das ein (in keinem Falle abgeschlossenes) zweifach ausgedehntes Continuum bildet, und ganz aus Punkten "algebraischen Charakters" besteht, auch durch ein entsprechendes Stück einer rationalen Curve gleichmässig angenähert werden kann.† Es kann dann eintreten, dass das ganze Curvenstück, oder auch nur ein Theil davon, durch die Parameterdarstellung mehrfach überdeckt wird, dass alle Punkte eines zweidimensionalen Gebietes auf der Curve zu mehreren Stellen gehören. Dieses Vorkommniss kann man aber immer vermeiden, indem man nöthigenfalls das Gebiet, in dem die Veränderliche t sich bewegen darf, weiter einschränkt, auf ein Gebiet $\{\{t\}\}$ reduciert, oder auch, indem man einen anderen Parameter einführt. Die dann etwa noch übrigen isolierten Punkte des Raumes, die zu mehreren Stellen (t) als Curvenpunkte gehören, wird man als "verschiedene" Punkte des (eingeschränkten) Curvenstücks so oft zählen, als entsprechende Stellen mit zugehörigen Umgebungen auf der RIEMANN'schen Fläche $\{\{t\}\}$ vorhanden sind.

Die durch ein- oder mehrmalige Differentiation der Functionen

$$x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t), \; x_3 = x_3(t)$$

nach dem Parameter t erhaltenen Systeme von Grössen x'_k, x''_k u. s. w. deuten wir jetzt als Coordinaten von Vectoren (s. § 1), die wir mit x', x'' u. s. f. bezeichnen. Substituieren wir diese in die in § 1 gebildeten Ausdrücke elementarer

* Sind mehrere Bereiche gemeinsamer Existenz der Functionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ vorhanden, so kommt stets nur einer von diesen in Betracht.

† Blosse Grenzstellen, sogenannte wesentlich-singuläre Stellen, die sich natürlich mit den betrachteten überlagern können, bleiben von unserer Untersuchung völlig ausgeschlossen. Man kann ihren Inbegriff unter dem Namen der *natürlichen Grenze* der Curve zusammenfassen; wohin wir mithin auch etwanige isolirte wesentlich-singuläre Stellen rechnen.

Wollte man auch die Grenzpunkte noch sämmtlich zur Curve rechnen, so würde man sich der Folgerung nicht entziehen können, dass diese unter Umständen den ganzen Raum ausfüllt. Ist zum Beispiel $f(x)$ ein eigentlich-hyperelliptisches Integral, so finden sich in jeder Umgebung irgend eines Punktes (x, y) reguläre Stellen der Curve $y - f(x) = 0$.

Vector-Invarianten, so entstehen eine Reihe von Grössen wie $(x' \mid x')$, $(x' \mid x'')$, $(x'x''x''')$, $(x'x''x'''')$ u. s. f., die natürlich ebenfalls bei Bewegungen ungeändert bleiben. Wir wollen sie, da sie nicht schlechthin von der Curve sondern auch von der gewählten Parameterdarstellung abhängen, *elementare differentielle Semiinvarianten (der Curve) in Bezug auf die Bewegungsgruppe* nennen.

In gleicher Weise können wir ferner zur Curve gehörige *differentielle elementare Semicovarianten* bilden, indem wir neben den Differentialquotienten noch die Coördinaten ω_1, ω_2, ω_3 eines willkürlichen von dem Parameter t nicht abhängigen Vectors ω zulassen, also z. B.

$$(x' \mid \omega), \quad (x'x''\omega),$$

wozu noch die von ω allein abhängige Invariante oder hier vielmehr "Covariante" $(\omega \mid \omega) \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ zu fügen sein wird. Aus diesen Grössen lassen sich dann weiter überhaupt ganze, rationale u. s. f. Semi-Invarianten and Semi-Covarianten bilden, wie bei Vectoren überhaupt Bewegungsinvarianten (§ 1).

Gewisse unter den ganzen rationalen Semi-Invarianten und -Covarianten wie z. B.

$$(x' \mid x'), \quad (x'x'' \mid x'x''), \quad (x'x''x'''),$$

$$(x' \mid \omega), \quad (x'x''\omega), \quad (x'x'' \mid x'\omega),$$

oder, in etwas verwickelteren Fällen,

$$(x' \mid x')(x'x'' \mid x'x''') - 3(x' \mid x'')(x'x'' \mid x'x'')$$

und

$$(1 \mid 1)(134) - 3(1 \mid 2)(124) + 3(2 \mid 2)(123) + 4(1 \mid 3)(123)\,*$$

haben nun auch gegenüber Einführung eines neuen complexen Parameters τ an Stelle von t (die hier natürlich nur durch eine analytische Substitution erfolgen kann) ein besonders einfaches Verhalten: Sie nehmen je einen Factor an, der nur von der Parametersubstitution abhängt. Diese Grössen, die also nur einen Theil der erklärten ganzen rationalen Semi-Invarianten und Covarianten umfassen, sind es nun, auf die es in der Curventheorie eigentlich ankommt: Wir nennen sie *ganze rationale Differential-Invarianten und -Covarianten der betrachteten Curve in Bezug auf die Bewegungsgruppe*, und rechnen zu den letzten auch die "identische Covariante"

$$(\omega \mid \omega) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

die von der Curve gar nicht abhängt, und bei der Parametersubstitution völlig ungeändert bleibt.†

Der Factor, mit dem irgend eine dieser ganzen rationalen Differentialinvarianten oder -Covarianten bei Ausführung einer Parametersubstitution re-

---

* Wir deuten öfter die Differentiationen durch blosse Ziffern an. Obiger Ausdruck steht also für $(x' \mid x')\,(x'x''x'''') - 3(x' \mid x'')\,(x'x''x'''') + [3\,(x'' \mid x'') + 4\,(x' \mid x''')]\,(x'x''x''')$.

† Der Begriff der Semi-Invariante oder -Covariante umfasst also den Begriff der Invariante oder Covariante.

produciert wird, ist stets eine Potenz des Differentialquotienten $dt : d\tau$* *mit ganzzahligem nicht negativem Exponenten.*

Wenn nämlich n die Ordnung des höchsten in der betrachteten Function vorkommenden Differentialquotienten bezeichnet, so ist dieser Factor jedenfalls eine ganze rationale Function von $dt : d\tau, \cdots, d^n t : d\tau^n$. Wäre er also nicht eine Potenz von $dt : d\tau$, so könnte man ihn durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen t und τ der Art zum Verschwinden bringen, dass t als Function von τ nicht constant wäre. Andererseits würde man auch einen neuen Parameter τ_1 so einführen können, dass der zu diesem gehörige Factor nicht verschwindet. Den Parameter τ_1 würde man aber auch durch Vermittelung von τ einführen können. Man erhielte also einen Widerspruch, indem die transformierte Invariante oder Covariante bei der einen Art der Berechnung identisch gleich Null würde, bei der anderen nicht. Nur in dem Falle, wo alle Lösungen jener Differentialgleichung auch der Gleichung $dt : d\tau = 0$ genügen, verschwindet der Widerspruch, da dann eine Parametersubstitution überhaupt nicht mehr vorliegt.

Den Exponenten der genannten Potenz nennen wir das *Gewicht* der einzelnen Differentialinvariante oder Covariante; dieses ist dann, wenn man die genannte Function als Summe von Producten elementarer Semiinvarianten oder Semicovarianten dargestellt hat, gleich der Summe aller vorkommenden Differentiationsexponenten in irgend einem Gliede, also eine ganze nicht negative Zahl. In den angeführten Beispielen sind die Gewichte der Reihe nach die Zahlen 2, 6, 6; 1, 3, 4; 9 und 10.

Weiter ergeben sich nun ohne Weiteres die Begriffe der rationalen, der ganzen algebraischen u. s. w. Differential-Invarianten und -Covarianten, denen ebenfalls in leicht kenntlicher Weise — nicht nothwendig ganzzahlige oder positive — "Gewichte" zuzuschreiben sind.†

Unter den algebraischen Differential-Invarianten finden sich zwei Arten, denen für die Curventheorie eine besondere Bedeutung zukommt, die nämlich, die das Gewicht Null, und die, die das Gewicht Eins haben. Die ersten heissen *absolute Invarianten;* zu ihnen gehören, soweit sie existiren, die als *Krümmung* und *Torsion* einer Curve bezeichneten Grössen

$$\frac{\sqrt{(12\,|\,\dot{1}\dot{2})}}{(1\,|\,1)\sqrt{(\dot{1}\,|\,\dot{1})}} \quad \text{und} \quad \frac{(123)}{(12\,|\,\dot{1}\dot{2})},$$

die erste eine zweiwerthige Umlegungsinvariante, die zweite eine rationale Bewegungsinvariante.‡

* Bei Flächen tritt an dessen Stelle eine Functionaldeterminante.

† Man vergleiche die analogen Definitionen in des Verfassers *Methoden zur Theorie der ternären Formen.* (I Abschnitt).

‡ Einige Autoren geben der "Torsion" das entgegengesetzte Vorzeichen, bestimmen sie auch wohl nur indirect mit Hülfe der FRENET'schen Formeln. Beides scheint uns nicht empfehlenswerth.

Die Bedeutung der absoluten Invarianten vom Gewichte Eins beruht darauf, dass offenbar auch dem Differential dt ein "Gewicht," und zwar das Gewicht -1 zugeschrieben werden muss. Hat die Invariante J das Gewicht Eins, so wird $J \cdot dt$ ein "absolutes Differential," und

$$\int J dt,$$

eine sogenannte *Integralinvariante;* wie im nächstliegenden Falle der Curvenbogen

$$\int \sqrt{(x' \mid x')}\, dt.$$

Als Function ihrer oberen Grenze ist jede Integralinvariante, sofern sie bei einer bestimmten Curve überhaupt existiert, eine analytische Function des Ortes auf der Curve, die nicht abhängt von der einzelnen Parameterdarstellung, auch nicht an deren etwanige natürliche Grenzen gebunden ist, und deren Singularitäten daher nothwendig durch Bewegungen unzerstörbare Besonderheiten der zugehörigen Curvenpunkte selbst — nicht blos einer Parameterdarstellung — anzeigen. Dasselbe gilt natürlich auch von den absoluten Invarianten, die als besondere Integralinvarianten angesehen werden können.

Ist eine Integralinvariante, wie z. B. der Bogen, als Function ihrer oberen Grenze nicht constant, so kann sie als unabhängige Veränderliche benutzt werden: Man hat dann einen *natürlichen Parameter* vor sich. Wir werden weiterhin öfter solche Parameter einführen, die bis auf eine additive Constante, oder, wie der Bogen, bis auf das Vorzeichen und eine additive Constante bestimmt sind. (Nur bei einer ganz speciellen Curvenfamilie, nämlich bei den Minimalgeraden, giebt es natürliche Parameter dieser Art nicht).

§ 3. Gliederung des Stoffs.

Aus dem im vorigen § Gesagten geht hervor, dass man von einer "Curve"

$$x = x(t) \qquad \{d.\ h.\ x_k = x_k(t),\ k = 1, 2, 3\}$$

reden darf, ungeachtet des Umstandes, dass eine einzelne Parameterdarstellung möglicher Weise blos ein Curvenstück liefert. Man muss dann nur die Betrachtung auf solche Curvenpunkte beschränken, in deren Umgebung eine solche Parameterdarstellung vorhanden ist, dass die Coordinaten x_k durch gewöhnliche Potenzreihen ausdrückbar werden, und man muss voraussetzen, dass der gerade benutzte Parameter t eben ein solcher Parameter ist. Der Parameter fungirt dann eigentlich nur noch als Zeichen für den einzelnen Punkt der genannten Art. Diese Punkte "algebraischen Charakters" bilden dann ein (unter den hier gemachten Voraussetzungen niemals abgeschlossenes) Continuum, den *Existenzbereich der Curve,* dessen Grenzstellen, falls (im Endlichen) solche vorhanden sind, die *natürliche Grenze* der Curve ausmachen.* Im Existenz-

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 12.

bereich liegen dann insbesondere die *regulären Punkte* der Curve, die Punkte algebraischen Charakters nämlich, für die eine derartige (*reguläre*) Parameterdarstellung existiert, dass mindestens einer der Differentialquotienten x_1', x_2', x_3' nicht verschwindet. In der Umgebung eines jeden Punktes dieses *Regularitätsbereiches* kann man dann mindestens eine der Coordinaten x_1, x_2, x_3 selbst als regulären Parameter benutzen, nicht aber — was zu beachten ist — immer für alle regulären Punkte dieselbe Coordinate. Da auch diese regulären Punkte schon ein zweifach ausgedehntes Continuum bilden und die Curve im Ganzen bestimmen, so kann man sich auf die Betrachtung von solchen in regulärer Parameterdarstellung gegebenen regulären Punkten da beschränken, wo es, wie hier, darauf ankommen wird, Curvenfamilien durch Differentialgleichungen zu charakterisieren.

Eine invariante, bei der Gesammtheit aller Bewegungen in Ruhe bleibende Familie von Curven wird immer erhalten, wenn wir von einer nicht an sich verschwindenden ganzen rationalen Differentialinvariante J — z. B. von der Invariante $(x'\,x''\,x''')$ — verlangen, dass sie an jeder regulären Stelle einer besonderen Curve "den Werth Null habe," nämlich *bei regulärer Parameterdarstellung der Umgebung eben dieser Stelle* verschwinde.

Wir schreiben dann $J \equiv 0$ oder deutlicher

$$J \equiv 0 \qquad \{t\},^*$$

unterscheiden also diese Forderung in der Bezeichnung von der Forderung $J = 0$, die das Verschwinden von J nur an einer einzelnen Stelle verlangt.

Entsprechend können wir invariante Curvenfamilien durch die Forderung erklären, dass für besondere Curven an allen regulären Stellen eine (übrigens nicht *völlig* beliebige, vgl. weiter unter A) rationale Covariante C für alle Lagen des Vectors ω verschwinde; wofür wir da, wo es die Deutlichkeit verlangen wird, schreiben wollen

$$C \equiv 0 \qquad \{t,\,\omega\}.\dagger$$

Invariante Differentialgleichungen und invariante Systeme von Differentialgleichungen der beschriebenen Art sind es nun, die bei der Classification der analytischen Curven die Haupteintheilung liefern: Wir stellen zunächst einige einfache Lehrsätze zusammen, die uns dann sogleich zu einer sachgemässen Gliederung des zu behandelnden Stoffs führen werden.

(A). *Das Gleichungssystem*

$$(x'\,|\,\omega) \equiv 0 \qquad \{t,\,\omega\}$$

besteht bei keiner analytischen Curve.

(B). *Das Gleichungssystem*

$$(x'x''\omega) \equiv 0 \qquad \{t,\,\omega\}$$

* Etwa zu lesen: "J identisch gleich Null für alle t" (nämlich für alle regulären t).

† "C identisch gleich Null für alle t und alle ω."

wird durch jede gerade Linie, aber durch keine andere analytische Curve befriedigt.

Es verschwinden bei den Geraden überhaupt alle elementaren Semicovarianten des Typus $(x^{(\alpha)} x^{(\beta)} \omega)$, und dann natürlich auch alle alternierenden Invarianten $(x^{(\alpha)} x^{(\beta)} x^{(\gamma)})$ identisch.

(C). *Ebenso ist die Gleichung*

$$(x' x'' x''') \equiv 0 \qquad \{t\}$$

*charakteristisch für die ebenen Curven.**

Bei diesen verschwinden natürlich überhaupt alle alternierenden elementaren Semiinvarianten $(x^{(\alpha)} x^{(\beta)} x^{(\gamma)})$ identisch.

Ist eine analytische Curve nicht gerade, ist also

$$(x' x'' \omega) \not\equiv 0 \qquad \{t, \omega\}$$

so nennen wir sie *krumm*, eine *krumme Linie*,† ohne damit sagen zu wollen, dass auch das conventionelle Maass ihres Gekrümmtseins — die trotz des Widerspruches von GAUSS auch heute noch allgemein sogenannte *Krümmung* — von Null verschieden sein müsste. Unebene Curven, solche also, für die

$$(x' x'' x''') \not\equiv 0 \qquad \{t\}$$

ist, heissen entsprechend auch *doppelt-gekrümmt*.

Jede analytische Curve hat in jedem Punkte algebraischen Charakters eine bestimmte Tangente, Grenzlage der Sehnen, die den Punkt mit seinen Nachbarpunkten ‡ verbinden; und wenn sie eine krumme Linie ist, so erfüllen auch diese Tangenten wieder — eventuell zusammen mit gewissen ihrer Grenzlagen — ein zweidimensionales analytisches Gebilde, die Tangentenfläche der Curve. Ferner hat jede *krumme* Linie in jedem Punkte algebraischen Charakters eine bestimmte Schmiegungsebene, Grenzlage der Ebenen, die die Tangente mit den genannten Nachbarpunkten verbinden, und wenn die Curve nicht eben ist, so erfüllen diese Schmiegungsebenen, wieder eventuell sammt Grenzlagen, ein zweidimensionales analytisches Gebilde: "die Curve als Ort ihrer Schmiegungsebenen."

(D). *Die Gleichung*

$$(x' \,|\, x') \equiv 0 \qquad \{t\}$$

* $(x'x''x''')$ ist eine sogenannte WRONSKIsche Determinante. Wegen deren Verschwinden unter anderen Voraussetzungen vergleiche man die auf Seite 3 bereits citierten Untersuchungen.

† Wir fühlen wohl die Härte dieser ganzen Terminologie. Es ist fast unerträglich, dass ein zweidimensionales Gebilde als Linie oder Curve bezeichnet werden soll. So ist es indessen schon längst üblich, und wir sehen auch nicht, wie man hätte anders zu Werke gehen sollen.

‡ Wir erinnern daran, dass gewisse der Curve als reguläre Punkte angehörige Punkte des Raumes als Curvenpunkte mehrfach zu zählen sind. Diese Punkte haben verschiedene Umgebungen und Tangenten, die ebenfalls mehrfach zu zählen sein werden.

sagt aus, dass sämmtliche Tangenten der Curve $x = x(t)$ den absoluten Kegelschnitt treffen. Ist die Curve eine krumme Linie, so berühren dann auch alle ihre Schmiegungsebenen den absoluten Kegelschnitt.*

Eine solche Curve wird *Minimalcurve* genannt. Da dann das Differential des Bogens identisch verschwindet, so kann man bei den Minimalcurven den Bogen nicht als Parameter benutzen.

(E). *Die Gleichung*

$$(x'x''\,|\,x'x'') \equiv (x'\,|\,x')(x''\,|\,x'') - (x'\,|\,x'')^2 \equiv 0 \qquad \{t\}$$

besteht für alle geraden Linien. Bei krummen Linien aber sagt sie aus, dass deren sämmtliche Schmiegungsebenen den absoluten Kegelschnitt berühren.

Solche Ebenen heissen *Minimalebenen.* Da nach Nr. (5), S. 10

$$(12\,|\,12)(13\,|\,13) - (12\,|\,13)^2 \equiv (1\,|\,1)(123)^2$$

ist, und da aus $(12\,|\,12) \equiv 0 \; \{t\}$ auch $(12\,|\,13) \equiv 0 \; \{t\}$ folgt, so ergiebt sich weiter:

(F). *Jede krumme Linie, für die*

$$(x'x''\,|\,x'x'') \equiv 0 \qquad \{t\}$$

ist, liegt entweder in einer Minimalebene, oder sie ist eine Minimalcurve.†

Beides schliesst sich natürlich nicht aus; weiter aber findet sich:

(G). *Jede ebene Minimallinie ist gerade (eine Minimalgerade.)*

Dies ist selbstverständlich, wenn man sich auf die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen stützen will. Elementar kann man den Satz (G) so herleiten:

Aus $(1\,|\,1) \equiv 0 \; \{t\}$ folgt $(1\,|\,2) \equiv 0 \; \{t\}$, $(1\,|\,3) + (2\,|\,2) \equiv 0 \; \{t\}$, also nach *Nr* (2), *S.* 9, $(123)^2 + (2\,|\,2)^3 \equiv 0 \; \{t\}$. Aus $(123) \equiv 0 \; \{t\}$ folgt dann $(2\,|\,2) \equiv 0 \; \{t\}$, und da, wiederum nach *Nr* (2), $(12\omega)^2 + (2\,|\,2)(1\,|\,\omega)^2 \equiv 0$ $\{t, \omega\}$ ist, so ergiebt sich schliesslich $(12\omega) \equiv 0 \; \{t, \omega\}$.

Aus dem Gesagten ergiebt sich nunmehr eine Vertheilung aller analytischen

---

*Absoluter Kegelschnitt heist jene der "uneigentlichen Ebene" angehörige — von unserer Untersuchung sonst ausgeschlossene — Curve, die bei allen Aehnlichkeitstransformationen in Ruhe bleibt. Sie wird in geeigneten Ebenencoordinaten dargestellt durch eine Gleichung der Form

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Der in der deutschen Litteratur gebräuchlichere Ausdruck "unendlich ferner Kugelkreis (!)" (oder gar "Kugelkreis") ist irreleitend, wie übrigens auch schon der Ausdruck unendlich ferne Ebene. Hält man nämlich von zwei eigentlichen Punkten den einen fest, und lässt man den anderen auf den absoluten Kegelschnitt rücken (wodurch er seine Eigenschaft als eigentlicher Punkt verliert), so wird der Abstand beider Punkte in der Grenze keineswegs nur den Werth ∞, sondern jeden beliebigen Werth annehmen können.

†Aus Gründen, auf die wir hier nicht eingehen wollen, kann man die in Minimalebenen gelegen *krummen* Linien als die *regulären*, die Geraden und die krummen Minimallinien als die *singulären Lösungen* der Gleichung $(x'x''\,|\,x'x'') \equiv 0 \; \{t\}$ bezeichnen.

Curven des Raumes auf invariante Familien, die so beschaffen ist, dass jede beliebige Curve einer und nur einer dieser Familien angehört. — Indem wir diese Aufzählung folgen lassen, bilden wir zugleich die Terminologie noch etwas weiter aus:

REGULÄRE CURVEN: $(12\,|\,12) \not\equiv 0 \;\{t\}$.

I. *Unebene reguläre Curven:* $(123) \not\equiv 0 \;\{t\}$.

II. *Ebene reguläre Curven, oder krumme Linien in Euklidischen Ebenen:*
$$(123) \equiv 0 \;\{t\}.$$

SINGULÄRE CURVEN: $(12\,|\,12) \equiv 0 \;\{t\}$.

III. *Krumme ebene singuläre Linien, oder krumme Linien in Minimalebenen:*
$$(123) \equiv 0 \;\{t\}, \qquad (1\,|\,1) \not\equiv 0 \;\{t\}, \qquad (12\omega) \not\equiv 0 \;\{t, \omega\}.$$

IV. *Unebene singuläre Linien, oder krumme Minimallinien:*
$$(123) \not\equiv 0 \;\{t\}, \qquad (1\,|\,1) \equiv 0 \;\{t\}.$$

V. *Euklidische gerade Linien:*
$$(12\omega) \equiv 0 \;\{t, \omega\}, \qquad (1\,|\,1) \not\equiv 0 \;\{t\}.$$

VI. *Die Minimalgeraden:*
$$(12\omega) \equiv 0 \;\{t, \omega\}, \qquad (1\,|\,1) \equiv 0 \;\{t\}.$$

In den drei letzten Fällen ist die Bedingungsgleichung $(12\,|\,12) \equiv 0 \;\{t\}$ eine Folge der sonst angegebenen Bedingungen, wie im Falle IV ausserdem auch $(12\omega) \not\equiv 0 \;\{t, \omega\}$. Die beiden letzten Familien, die nur je ∞^8 und ∞^6 (bei der üblichen Zählung von complexen Constanten ∞^4 und ∞^3) Curven umfassen, bilden bereits je eine *Classe* äquivalenter (congruenter) Figuren. Sie scheiden also aus der weiteren Behandlung des Aequivalenzproblems aus. Da man ferner die beiden ersten Familien, also die regulären Curven, gemeinsam behandeln kann, so werden wir drei Fälle zu erörtern haben: Die regulären Curven und die beiden Familien III und IV von singulären Curven.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass eine vollständige Disjunction, wie wir sie vorgenommen haben, niemals durch Aufstellung blos von *Gleichungen* erfolgen kann. Ungleichungen werden natürlich auch in der bisherigen Litteratur schon benutzt. Man hat sie aber, wie in der Einleitung schon bemerkt, in der Regel nur implicite angegeben, indem man Begriffe wie den Bogen oder die Torsion verwendete, die unter Umständen unbrauchbar oder illusorisch werden.

§ 4. DIE REGULÄREN CURVEN.

Die Theorie der regulären analytischen Curven unterscheidet sich nur wenig von der hier als bekannt vorausgesetzten Theorie der reellen analytischen "Curven" oder vielmehr Curvenzüge (die jedoch nur Oerter von je ∞^1 reellen Punkten sind). Indessen sind einige Abweichungen von der üblichen Darstellungsform theils nöthig, theils wenigstens zweckmässig. Wir können deshalb diesen Gegenstand nicht bei Seite lassen.

Wir ersetzen zunächst den bereits auf reguläre Stellen eingeschränkten Bereich der zu betrachtenden Curvenpunkte durch einen in der Regel noch engeren Bereich, den wir als *Bereich von Punkten allgemeiner Lage* der Curve $x = x(t)$ bezeichnen. Diese Punkte sind dadurch charakterisirt, dass die als Identitäten im vorliegenden Falle unmöglichen Gleichungen

$$(x' \,|\, x') = 0, \qquad (x'x'' \,|\, x'x'') = 0$$

für den betrachteten Punkt bei regulärer Parameterdarstellung seiner Umgebung auch thatsächlich nicht bestehen.

Es ist dann natürlich auch $(x'x''\omega) \not\equiv 0 \ \{\omega\}$.

Es gilt nun der Satz:

An jeder Stelle allgemeiner Lage hat die reguläre Curve $x = x(t)$ eine bestimmte Tangente, die nicht Minimalgerade, und eine bestimmte Schmiegungsebene, die nicht Minimalebene ist. Zugleich hat sie an dieser Stelle eine bestimmte Hauptnormale und Binormale, die ebenfalls nicht Minimalgeraden sind.

Tangente, Hauptnormale und Binormale bilden zusammen ein rechtwinkliges Axenkreuz.

Wir bezeichnen jetzt mit α, β, γ drei *Einheitsvectoren*, die der Reihe nach in die Tangente, in die Hauptnormale und in die Binormale fallen; drei solche zu den genannten Geraden gehörige Vectoren nämlich, die den Bedingungen

$$(\alpha \,|\alpha) \equiv 1, \qquad (\beta \,|\, \beta) \equiv 1, \qquad (\gamma \,|\, \gamma) \equiv 1 \qquad \{t\}$$

genügen. Wir nehmen ferner an, dass diese Einheitsvectoren, mit ihren Anfangspunkten am Curvenpunkte selbst angeheftet, eine Figur bilden, die äquivalent (congruent) ist zu der Figur von drei anderen Einheitsvectoren, die vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgehend, ihre Endpunkte der Reihe nach in den Punkten

$$(1, 0, 0); \ (0, 1, 0); \ (0, 0, 1)$$

haben. Die Bedingung hierfür ist

$$(\alpha\beta\gamma) \equiv 1,$$

und es folgt dann noch

$$(\alpha \,|\, \omega) \equiv (\beta\gamma\omega), \qquad (\beta \,|\, \omega) \equiv (\gamma\alpha\omega), \qquad (\gamma \,|\, \omega) \equiv (\alpha\beta\omega).$$

Irgend zwei der drei Vectoren α, β, γ sind nunmehr bis auf numerische Factoren ± 1 bestimmt, der dritte aber ist dann völlig bestimmt.

Die noch vorhandene Unbestimmtheit, derzufolge es im Ganzen *vier* verschiedene Systeme von Vectoren α, β, γ giebt, kommt analytisch dadurch zum Ausdruck, dass in den zur Bestimmung von α, β, γ dienenden Gleichungen zwei von einander unabhängige Quadratwurzeln auftreten. Man erhält nach kurzer Rechnung

$$(6)\quad (\alpha|\omega)\equiv\frac{(x'|\omega)}{\sqrt{(x'|x')}},\quad (\beta|\omega)\equiv\frac{(x'x''|x'\omega)}{\sqrt{(x'|x')}\sqrt{(x'x''|x'x'')}},\quad (\gamma|\omega)\equiv\frac{(x'x''\omega)}{\sqrt{(x'x''|x'x'')}}$$

wobei zu beachten ist, dass nach Voraussetzung die Ungleichungen

$$(x'|x')\neq 0,\qquad (x'x''|x'x'')\neq 0$$

bestehen. Wir setzen nun noch

$$(7)\qquad \phi\equiv\frac{(12|12)}{(1|1)^3},\qquad \psi\equiv\frac{(123)}{(1|1)^3},$$

und

$$(8)\qquad \frac{1}{R^2}\equiv\phi,\qquad \frac{1}{T}\equiv\frac{\psi}{\phi},$$

so dass R und T den (zweiwerthigen) *Krümmungsradius* und den sogenannten *Torsionsradius* der Curve an der betrachteten Stelle allgemeiner Lage bedeuten. Im Ausdruck von R kommen dann eben dieselben Wurzelgrössen vor, wie in den Formeln (6); wir erklären, dass

$$\frac{1}{R}\equiv\frac{\sqrt{(12|12)}}{(1|1)\sqrt{(1|1)}},\qquad ds\equiv\sqrt{(1|1)}\,dt$$

sein soll, und erhalten dann für die Gesammtheit der Stellen allgemeiner Lage die Formeln

$$(6b)\quad (\alpha|\omega)\equiv\left(\frac{dx}{ds}\,\middle|\,\omega\right),\quad (\beta|\omega)\equiv R\cdot\left(\frac{d^2x}{ds^2}\,\middle|\,\omega\right).\quad (\gamma|\omega)\equiv R\cdot\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\omega\right),$$

sowie *die* Frenet-Serret*schen Differentialgleichungen:*

$$(9)\qquad \frac{d\alpha}{ds}\equiv\frac{\beta}{R},\qquad \frac{d\beta}{ds}\equiv-\frac{\alpha}{R}+\frac{\gamma}{T},\qquad \frac{d\gamma}{ds}\equiv-\frac{\beta}{T};$$

wobei zu beachten ist, dass ein Vorzeichenwechsel von R die entsprechende Aenderung von β und γ nach sich zieht. Es ergeben sich nun die üblichen Folgerungen; insbesondere wird, bei ohne Weiteres verständlicher Bezeichungsweise, der Punkt

$$(10)\qquad y\equiv x+R\beta$$

der Krümmungsmittelpunkt, und der Punkt

$$(11)\qquad z\equiv x+R\beta+T\frac{dR}{ds}\gamma\qquad \{\text{sofern } (123)\neq 0\}$$

der Mittelpunkt der Schmiegungskugel, für deren *Radius* $\mathfrak{R}$ sich die Formel

$$(12)\quad \mathfrak{R}^2 \equiv R^2 + \left(T\frac{dR}{ds}\right)^2 \equiv \frac{(1|1)^2(13|13) - 6(1|1)(1|2)(12|13) + 9(1|2)^2(12|12)}{(123)^2}$$

findet. (An Stellen, die nach unserer Definition noch solche "allgemeiner Lage" sind, kann sehr wohl die Invariante (123) verschwinden — wie es bei ebenen Curven durchgängig der Fall ist —, und es tritt dann, dem Werthe $\mathfrak{R}^2 = \infty$ entsprechend, an Stelle der Schmiegungskugel die Schmiegungsebene, die in diesem Falle mit der Curve eine mindestens vierpunktige Berührung hat. Wir reden dann von einer *uneigentlichen Schmiegungskugel.* Vgl. § 7.)

Die wichtigste Anwendung der Formeln (9), auf deren Zusammenhang mit RICCATI'schen Gleichungen wir hier nicht eingehen wollen, ist der Satz von der Bestimmung regulärer Curven aus sogenannten *natürlichen Gleichungen* (equazioni intrinseche). Als solche erklären wir — abweichend von den herkömmlichen Festsetzungen — analytische Abhängigkeiten der Form

$$(13)\qquad \phi = \phi(s), \qquad \psi = \psi(s).$$

Der angedeutete Lehrsatz lautet dann so:

Die absoluten Invarianten ϕ und ψ können als analytische Functionen des Bogens s mit gemeinsamem Existenzbereich derart angenommen werden, dass $\phi(s)$ sich nicht auf den constanten Werth Null reduciert, im Uebrigen aber beliebig. Es giebt dann reguläre Curven mit den natürlichen Gleichungen $\phi = \phi(s)$, $\psi = \psi(s)$, und zwar sind alle diese Curven in Bezug auf (complexe) Euklidische Bewegungen mit einander äquivalent (zu einander congruent).

Es folgt dann natürlich, dass zu derselben Familie unter einander äquivalenter Curven auch alle die gehören, die man findet, wenn man von Gleichungen der Form

$$\phi_1 = \phi\{\pm(s - s_0)\}, \qquad \psi_1 = \psi\{\pm(s - s_0)\}$$

ausgeht. Schreibt man also

$$(14)\qquad \phi_1 = \phi_1(s_1), \qquad \psi_1 = \psi_1(s_1),$$

so werden zwei reguläre Curven mit natürlichen Gleichungen (13) und (14) immer dann und nur dann äquivalent sein, wenn die Gleichungen

$$(15)\qquad \phi(s) = \phi_1(s_1), \qquad \psi(s) = \psi_1(s_1)$$

mit einander und mit der Gleichung

$$(16)\qquad ds^2 = ds_1^2$$

verträglich sind.

Die hiermit erhaltene Lösung des Aequivalenzproblems für den Fall regulärer Curven können wir indessen noch nicht als befriedigend ansehen. Die

Gleichungen (15) können nämlich erst angesetzt werden, wenn man schon, für beide Curven, durch Quadraturen den Bogen berechnet und ihn dann als unabhängige Veränderliche eingeführt hat. Es ist aber einzuwenden, dass die Einführung gerade des Bogens als Parameter gar nicht nöthig ist. Wollen wir Täuschungen über die Tragweite des wirklich Geleisteten mit Sicherheit vermeiden, so müssen wir ferner fordern, *dass sorgfältig unterschieden werde zwischen Dem, was die Differentialgeometrie selbst zu leisten vermag, und dem Eliminationsproblem, das dann noch zu lösen übrig bleibt, und das der ganzen Sachlage nach eine allgemeine Lösung überhaupt nicht zulässt, in der Regel auch nicht auf eine endliche Zahl von Anwendungen der vier Species zurückgeführt werden kann.* Wir geben aus diesen Gründen einer anderen Fassung der Kriterien für die Aequivalenz von zwei regulären Curven gegenüber Bewegungen den Vorzug:

Um über die Aequivalenz (Euklidische Congruenz) von zwei vorgelegten regulären Curven zu entscheiden, bilde man für beide die rationalen absoluten Invarianten

$$(17)\qquad \begin{aligned} \phi &\equiv \frac{(12|12)}{(1|1)^3}, & \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 &\equiv 4\,\frac{[(1|1)(12|13)-3(1|2)(12|12)]^2}{(1|1)^9}, \\ \psi &\equiv \frac{(123)}{(1|1)^3}, & \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 &\equiv \frac{[(1|1)(124)-6(1|2)(123)]^2}{(1|1)^9}, \end{aligned}$$

und setze die so erhaltenen (an allen Stellen allgemeiner Lage existierenden) Functionen des Ortes auf der ersten Curve gleich den entsprechenden Functionen, die zu der zweiten Curve gehören.*†

Werden auf diese Weise eine oder mehrere analytische Abhängigkeiten zwischen den complexen Gebieten der beiden Curven bestimmt, so entspricht jeder einzelnen von diesen Abhängigkeiten eine Bewegung, die die erste Curve mit der zweiten zur Deckung bringt.

Unter einer analytischen Abhängigkeit zwischen den *Gebieten* der beiden Curven verstehen wir eine umkehrbar-analytische Beziehung, nicht aber eine solche, die allen Punkten der einen Curve einen einzelnen Punkt der anderen zuordnet.

Der aufgestellte Satz bezieht sich auf alle regulären Curven; es ist nicht erforderlich, deren mehrere Arten zu unterscheiden. Das wird dadurch erreicht, dass wir ein System von *vier* Gleichungen aufgestellt haben, von denen dann immer mindestens eine — aber, was wohl zu beachten, nicht immer dieselbe — überflüssig ist. Indessen verdient der Fall

$$\phi \equiv \text{const.}, \qquad \psi \equiv \text{const.}$$

* Die präcise Definition dieses Begriffes haben wir auf Seite 20 angegeben.

† Handelte es sich um die Frage nach der Aequivalenz sogenannter *orientierter* Curven, so würden an Stelle von $(d\phi/ds)^2$ und $(d\psi/ds)^2$ zu setzen sein $d\phi/ds$ und $d\psi/ds$. Da auch die Begriffe Curve und orientierte Curve gelegentlich schon mit einander verwechselt worden sind, so machen wir ausdrücklich auf deren Verschiedenheit aufmerksam.

doch eine besondere Betrachtung. Nach dem Gesagten reichen schon die Gleichungen $\phi = \phi_1$, $\psi = \psi_1$ für die Congruenz zweier solcher Curven aus. Diese Gleichungen ziehen dann zwar nicht die Gleichung $ds^2 = ds_1{}^2$ nach sich, wohl aber sind sie mit ihr verträglich. Es giebt $2 \cdot \infty^2$ (bei Zählung von complexen Constanten $2 . \infty^1$) Bewegungen, die die eine Curve mit der anderen zur Deckung bringen. Jede *Classe* von unter einander äquivalenten Curven der Art umfasst nur $\infty^{10}(\infty^5)$ Individuen, statt $\infty^{12}(\infty^6)$ wie in den übrigen Fällen. Wir nennen alle diese Curven *reguläre gemeine Schraubenlinien.** Jede von ihnen ist Bahncurve einer durch sie bestimmten eingliedrigen continuierlichen Gruppe von Bewegungen, und jede liegt auf einem bestimmten Cylinder 2. Ordnung. Ist $R^2 + T^2 \not\equiv 0$, oder, was hier dasselbe aussagt, $\phi^3 + \psi^2 \not\equiv 0$, so ist dieser Cylinder ein (eigentlicher, s. weiter unten) Rotationscylinder. Algebraisch und dann auch rational sind unter den hierhergehörigen Curven nur die ebenen regulären Schraubenlinien oder *die regulären Kreise*, die den Gleichungen

$$(18) \qquad (1|1)(12|13) - 3(1|2)(12|12) \equiv 0, \qquad (123) \equiv 0 \qquad \{t\}$$

genügenden regulären Curven.

Die zweite Annahme $R^2 + T^2 \equiv 0$, also

$$\phi \equiv \text{const.}\ \{\not\equiv 0\}, \qquad \psi \equiv \text{const.}, \qquad \phi^3 + \psi^2 \equiv 0$$

ist äquivalent mit dem System der Gleichungen

$$(19) \qquad \begin{aligned} &(1|1)(12|13) - 3(1|2)(12|12) \equiv 0, \\ &(1|1)[(1|1)(13|13) - 3(1|2)(12|13)] + (12|12)^2 \equiv 0, \end{aligned}$$

und diese sind charakteristisch† für eine Familie von rationalen gemeinen regulären Schraubenlinien, die LYON'*sche Curven* heissen, und von der dritten Ordnung sind. Die zugehörigen Cylinder 2. Ordnung sind in diesem Falle parabolisch, und Grenzlagen von Rotationscylindern (uneigentliche Rotationscylinder). Ihre Erzeugenden sind Minimalgeraden. Natürlich enthält diese Familie nur imaginäre Curven.

Nachdem durch unseren Lehrsatz die Bedeutung der Invarianten (17) einmal klar gestellt ist, können wir uns auch kürzer ausdrücken, indem wir das System der vier absoluten Invarianten (17) als "ein (vollständiges) System charakteristischer Invarianten" bezeichnen.‡ Wir können dann kurzweg sagen:

---

* Die Umgrenzung des mit den Worten gemeine Schraubenlinie zu verbindenden Begriffs ist häufig unklar. *Wir* brauchen dieses Wort für alle analytischen Curven, die eingliedrige aber nicht mehrgliedrige continuierliche Bewegungsgruppen zulassen (und folglich auch bestimmen). Nach dem im Vorwort Bemerkten werden als *uneigentliche* gemeine Schraubenlinien dann gewisse Grenzfälle zu bezeichnen sein, nämlich die geraden Linien. Im Texte sind diese jedoch ausgeschlossen: Daher brauchen wir nicht den Zusatz "eigentlich."

† Natürlich nur zusammen mit der hier überall vorausgesetzten Ungleichung $(12|12) \not\equiv 0$ $\{t\}$.

‡ *Ein* System — und zwar eines der einfachsten. Man würde auch noch andere Systeme "charakteristischer" Invarianten bilden können.

Nothwendige und hinreichende Bedingung der Congruenz zweier regulärer analytischer Curven ist die Verträglichkeit der Gleichungen, die entstehen, wenn man ein System charakteristischer Invarianten der einen Curve dem entsprechenden System von Bewegungsinvarianten der zweiten gleichsetzt.

Derselbe Gedanke lässt sich schliesslich auch so ausdrücken:

Damit zwei reguläre Curven congruent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass zwischen deren charakteristischen Bewegungsinvarianten beidemal dieselben analytischen Abhängigkeiten stattfinden.

In unserer weiteren Untersuchung werden wir ganz ähnlichen Verhältnissen begegnen. Wir können uns daher die lästige Wiederholung gleichlautender Worte ersparen, wenn wir in jedem Falle einfach ein System "charakteristischer Invarianten" aufstellen.

§ 5. Die krummen Linien in Minimalebenen.

Die Minimalebenen haben wir erklärt als solche (eigentliche) Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren. Man sieht daraus, dass diese Ebenen sich von den Euklidischen Ebenen sehr wesentlich dadurch unterscheiden, dass sie nicht wie diese je eine Spiegelung bestimmen; in der That erkennt man sofort, dass jede Aehnlichkeitstransformation, die alle Punkte einer Minimalebene in Ruhe lässt, jeden einzelnen Punkt des Raumes in Ruhe lassen muss. Daraus folgt dann weiter, dass — wiederum abweichend von dem Verhalten Euklidischer Ebenen — die Umlegungen, die eine Minimalebene in Ruhe lassen, deren Punkte auf andere Weise vertauschen, als die Bewegungen es thun:

Aus der Congruenz von zwei singulären ebenen Curven folgt also noch nicht deren Symmetrie.

Hiermit hängt eine andere Thatsache zusammen, die für die Minimalebenen gleichfalls charakteristisch, auch für unsere Theorie von Bedeutung ist:

Das quadrierte Bogenelement ist bei jeder Minimalebene (aber bei keiner anderen Fläche) das Quadrat eines — natürlich nur bis auf das Vorzeichen bestimmten — vollständigen Differentials. Die beiden Werthe dieses Differentials bleiben auch dann analytisch getrennt, wenn man die Minimalebene selbst beliebig variiert.*

Statt dieses Satzes beweisen wir sogleich einen anderen umfassenderen:

Die beiden Werthe für die Entfernung von zwei (eigentlichen) Punkten y, z derselben Minimalebene lassen sich durch die Coordinaten dieser Figuren und vierte Einheitswurzeln rational ausdrücken. Diese Werthe sind nur abhängig von den beiden Mimimalgeraden der Minimalebene, die die Punkte y und z enthalten, nicht von der Lage der Punkte auf diesen Geraden. Beide Werthe sind bei

* Wenn also zwei vierdimensionale Stücke analytischer Flächen, deren eine Minimalebene ist, *isometrisch* auf einander bezogen oder abgebildet sind, so ist auch die zweite Fläche eine Minimalebene, mithin (in der Regel vermöge einer anderen Abbildung) zu der ersten congruent. Auch diese Eigenschaft ist für die Minimalebenen charakteristisch. Man bestimmt leicht alle isometrischen Transformationen zwischen Punkten einer Minimalebene.

Bewegungen unveränderlich, bei Umlegungen aber werden sie mit einander vertauscht.

Zum Beweise nennen wir η irgend einen nicht verschwindenden Vector, dessen geradliniger Träger dem Büschel von Minimalgeraden angehört (oder angehören kann), die in der betrachteten Minimalebene liegen.* Ferner sei ϑ der Vector, der in einer seiner möglichen Lagen den Punkt y zum Anfangspunkt und den Punkt z zum Endpunkt hat, so dass

$$\vartheta_\kappa = z_\kappa - y_\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, 3).$$

ω endlich sei irgend ein der Minimalebene fremder (und folglich ebenfalls nicht verschwindender) Vector. Dann ist

$$(\eta|\eta) = 0, \qquad (\eta|\vartheta) = 0, \qquad (\eta|\omega) \neq 0,$$

und also nach Nr. 5 (S. 10)

$$(\vartheta\eta\omega)^2 + (\vartheta|\vartheta)(\eta|\omega)^2 = 0.$$

Man kann daher erklären, dass

$$\sqrt{-(\vartheta|\vartheta)} = \frac{(\vartheta\eta\omega)}{(\eta|\omega)} \tag{20}$$

sein soll: Die Abhängigkeit des Ausdruckes rechts von ω ist nur dem Scheine nach vorhanden. Ferner ist evident, dass dieser Ausdruck absolute Bewegungsinvariante ist, bei Umlegungen aber sein Vorzeichen wechselt. Sodann sieht man, dass der Vector ϑ bei Verschiebung von y oder z längs der zugehörigen Minimalgeraden in einen Vector der Form $\vartheta + \lambda\eta$ übergeht, dass also diese Operation den Ausdruck (20) unberührt lässt. Schliesslich ist

$$(\vartheta\,|\,\vartheta) = (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_3 - y_3)^2.$$

Eine unmittelbare Folge des Bewiesenen ist natürlich:

Bei jeder in einer unzweideutig bestimmten Minimalebene gelegenen Curve, die nicht Minimalgerade ist, giebt es einen natürlichen Parameter, der bis auf eine additive Constante bestimmt ist, und sich übrigens von zwei zugehörigen Werthen des Curvenbogens nur um Factoren unterscheidet, die vierte Einheitswurzeln sind.†

Dieser Parameter ist nämlich eben der Ausdruck (20), gebildet für zwei Punkte y, z der Curve, und betrachtet als Funktion von z, oder es ist irgend ein

* Ist $u_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ die Gleichung der Minimalebene, so dass $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, so wird also vorausgesetzt, dass $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = u_1 : u_2 : u_3$ ist.

† Es folgt nicht, dass auch zu jeder irgendwie gegebenen Euklidischen *Geraden* ein solcher ausgezeichneter Parameter gehören müsste. Erst nachdem man die beiden die Gerade enthaltenden Minimalebenen getrennt und sich für eine von ihnen entschieden hat, wird der Satz des Textes anwendbar. — Hat man auch über die vierte Einheitswurzel im Ausdruck des Bogens entschieden (*was wir mit Absicht unterlassen*), so werden die betrachteten Curven *orientiert*.

Ausdruck p, der sich von jenem um eine additive Constante unterscheidet. Ist die Curve eine krumme Linie, so erscheint der natürliche Parameter p als Integralinvariante; es wird

$$(21) \qquad p \equiv -\int \frac{(12\,|\,1\omega)}{(12\omega)}\,dt \equiv -\int \frac{(\eta x'\omega)}{(\eta\,|\,\omega)}\,dt \equiv \frac{(\vartheta\eta\omega)}{(\eta\,|\,\omega)},$$

wofern der Vector ϑ den Anfangspunkt y mit dem Endpunkt z der Integration verbindet.

Nehmen wir jetzt an, dass die Gleichung der zu untersuchenden Minimalebene (durch eine leicht herzustellende Coordinatentransformation) in die Form

$$(22) \qquad x_2 + ix_3 = 0$$

gesetzt sei, so können wir den erklärten Parameter p (ganz unabhängig von einer etwa zu untersuchenden Curve) als die eine von zwei Cartesischen Coordinaten für die Punkte dieser Ebene benutzen, indem wir etwa setzen:

$$(23) \qquad x_1 = ip, \qquad x_2 = q, \qquad x_3 = iq.$$

$p = \text{const.}$ ist dann die Gleichung irgend einer (eigentlichen) Minimalgeraden in der Ebene (22), jede andere analytische Curve in dieser Ebene aber wird darstellbar durch eine Gleichung der Form $q = \phi(p)$.

Mit Hülfe der vom Verfasser [Mathematische Annalen, Bd. 39 (1891), S. 527–535] angegebenen Formeln bestimmen wir jetzt die Gruppe aller Bewegungen (und Umlegungen), die die Minimalebene (22) in Ruhe lassen. Indem wir bei Darstellung der Bewegungen die dort eingeführten, der Bedingung

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

genügenden Parameter verwenden, gelangen wir sofort zu den Gleichungen

$$\alpha_2 + i\alpha_3 = 0, \qquad \beta_2 + i\beta_3 = 0, \qquad \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 = 0$$

als nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die verlangte Eigenschaft. Die Punkte (23) der Minimalebene selbst werden dann durch eine lineare Transformation der Form

$$(24) \qquad p^* = p + \alpha, \qquad q^* = \beta p + \gamma q + \delta \qquad \{\gamma \neq 0\}$$

unter einander vertauscht, wobei der Zusammenhang zwischen beiden Arten von Parametern dieser ist:

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

$$= (\gamma+1) : -i(\gamma-1) : \beta : i\beta : \frac{\alpha(\gamma-1)}{2} : -i\frac{\alpha(\gamma+1)}{2} : \frac{\alpha\beta-2\delta}{2} : i\frac{\alpha\beta-2\delta}{2};$$

die durch die Formeln (24) bestimmte Transformation beliebiger (eigentlicher)

Punkte des Raumes vermöge einer Bewegung wird mithin dargestellt durch die Gleichungen

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
\gamma x_1^* &= i\alpha\gamma + \gamma\cdot x_1 + i\beta\cdot x_2 - \beta\cdot x_3,\\
\gamma x_2^* &= \gamma\delta - i\beta\gamma\cdot x_1 + \frac{\beta^2+\gamma^2+1}{2}\cdot x_2 + i\,\frac{\beta^2-\gamma^2+1}{2}\cdot x_3,\\
\gamma x_3^* &= i\gamma\delta + \beta\gamma\; x_1 + i\,\frac{\beta^2+\gamma^2-1}{2}\cdot x_2 + \frac{-\beta^2+\gamma^2+1}{2}\cdot x_3.
\end{aligned}
$$

Die Umlegungen, die die Ebene $x_2 + ix_3 = 0$ in Ruhe lassen, werden dann ermittelt, indem man zu den schon gefundenen Transformationen etwa die involutorische Umlegung

$$x_1^* = -x_1,\; x_2^* = -x_2,\; x_3^* = -x_3;\; p^* = -p,\; q^* = -q$$

hinzufügt.

Wir haben also gesehen:

Die Bewegungen und Umlegungen, die irgend eine Minimalebene in Ruhe lassen, bilden eine viergliedrige aus zwei analytisch-getrennten Schaaren von Transformationen bestehende (*also sogenannte gemischte*) *Gruppe. Diese ist holoëdrisch-isomorph zu der von ihr hervorgerufenen Gruppe von Vertauschungen der Punkte der Minimalebene selbst. Ihre continuierliche Untergruppe wird bei geeigneter Wahl der Coordinaten für die Punkte der Minimalebene dargestellt durch die Gleichungen* (24).

Auch abgesehen von der natürlich abweichenden Parameterzahl ist dieses Ergebniss sehr verschieden von dem, was sich im Falle einer Euklidischen Ebene findet. Zwar werden auch in diesem Falle die Punkte der Ebene selbst durch eine zwei continuierliche Schaaren von Transformationen umfassende Gruppe vertauscht. Aber statt des holoëdrischen Isomorphismus hat man hier meroëdrischen vor sich, die entsprechende Gruppe von Transformationen der Punkte des Raumes umfasst vier continuierliche Schaaren. Die Bewegungen, die eine Euklidische Ebene in Ruhe lassen, bilden selbst schon eine gemischte Gruppe.

Nachdem wir nunmehr für unsere Zwecke Genügendes über die Eigenschaften der Minimalebenen ermittelt haben, wenden wir uns zur Untersuchung der in diesen gelegenen *krummen* Linien, die dargestellt werden können durch analytische Gleichungen der Form

$$(26)\qquad q = \phi(p) \qquad \{\phi'' \mathrel{\mp\!\!\!=} 0\}.$$

Als *Stelle allgemeiner Lage* der Curve $q = \phi(p)$ betrachten wir eine solche reguläre Stelle (vgl. 46, § 4), wo der Differentialquotient ϕ'' auch thatsächlich nicht verschwindet, wo also bei beliebiger regulärer Parameterdarstellung die Ungleichung $(x'x''\omega) \mathrel{\mp\!\!\!=} 0\ \{\omega\}$ besteht. Die Curve hat dann an einer solchen Stelle nur eine zweipunktige Berührung mit ihrer Tangente, die im Falle $\phi' = 0$ eine Minimalgerade ist. Die weiteren Entwickelungen beziehen sich (unmittelbar) nur auf solche Stellen, deren Gesammtheit natürlich auch hier ein Continuum bildet und die Curve völlig bestimmt.

Die mit ϕ und ψ bezeichneten absoluten Invarianten (Nr. 7) haben nunmehr beide den Werth Null. *Die Krümmung hat also hier den bestimmten Werth Null, während der Torsionsbegriff bei den Curven in Minimalebenen illusorisch ist.*

Durch die schon bei regulären Curven vorhandenen Invarianten lässt sich über die Aequivalenz von krummen Linien in Minimalebenen überhaupt Nichts entscheiden.

Bei Gebrauch des Parameters p verschwinden nämlich bereits alle elementaren Semiinvarianten mit Ausnahme der einen $(x' \,|\, x')$, die den numerischen Werth -1 annimmt. Diese Semiinvarianten sind also bei allen hier zu betrachtenden Curven durch dieselben analytischen Abhängigkeiten verbunden. Allgemein verschwinden hier alle Semiinvarianten $(ik \,|\, lm)$ und (ikl) identisch. Es treten aber im vorliegenden Falle neue Functionen auf, denen die Invarianteneigenschaft zukommt.

Eine solche einfachster Art ist zunächst der Quotient $\phi''' : \phi''$. Wir werden die aus (26) abzuleitende analytische Gleichung der Form

$$\frac{\phi'''}{\phi''} = f(p) \tag{27}$$

als *natürliche Gleichung* der Curve $q = \phi(p)$ bezeichnen. In dieser kann man die analytische Function $f(p)$ willkürlich vorschreiben. Es folgt dann

$$\phi(p) = \int dp \int dp\, e^{\int f(p)dp}, \tag{28}$$

und wenn man die Integrationsconstanten in (28) als veränderlich betrachtet und noch p durch $p - p_0$ ersetzt, so erhält man eine keinerlei Beschränkung unterliegende *Classe* von krummen unter einander äquivalenten Linien in der vorgeschriebenen Minimalebene.

Gehören ferner zu zwei solchen Curven (oder zu den entsprechenden Classen) die Functionen $f(p)$ und $f_1(p_1)$, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz dieser Curven (oder für die Identität ihrer Classen) in der Verträglichkeit der Gleichungen

$$f(p) = f_1(p_1), \qquad dp = dp_1, \tag{29}$$

oder, wenn die Gleichungen (26) gegeben sind, in der Verträglichkeit der Gleichungen

$$\phi''(p) : \phi'''(p) : \phi''''(p) = \phi_1''(p_1) : \phi_1'''(p_1) : \phi_1''''(p_1) \tag{30}$$

vermöge mindestens einer *umkehrbaren* analytischen Abhängigkeit zwischen p

und p_1. Statt der natürlichen Parameter p und p_1 kann man dann leicht noch einen unbestimmten Parameter einführen.

Die auf solche Art entstehenden Aequivalenzkriterien können wir indessen noch nicht als definitiv ansehen. Die angewendete Methode setzt nämlich voraus, dass man die Ebenen der zu untersuchenden Curven durch Gleichungen der Form (22) dargestellt hat. Hierzu wird nun zwar nur die Ausführung einer völlig elementaren Operation verlangt, aber diese wird doch unnöthiger Weise verlangt. Einer besonderen Eleganz kann sich unser Verfahren, bei der grossen vorhandenen Willkür, auch nicht rühmen, und dabei ist es mit einem Mangel behaftet, den wir nicht als unbedeutend ansehen können: Wir erhalten auf dem beschriebenen Wege noch gar keine Einsicht in das Verhältniss der neu auftretenden Invarianten zu den Invariantenbildungen, die schon im allgemeinen Falle vorhanden sind. Dieses Verhältniss besteht nämlich darin, dass bei den krummen Linien in Minimalebenen gewisse Semicovarianten die Eigenschaft von Covarianten annehmen, sich gegenüber Parametersubstitutionen ebenso wie diese verhalten, und dass ferner geeignet gebildete Quotienten aus solchen Grössen von dem Hülfsvector ω unabhängig werden und die Eigenschaft von Invarianten annehmen. Dies wollen wir nunmehr sichtbar machen, indem wir an die im Wesentlichen schon abgeleitete, auf der Identität

$$(12\,|\,1\omega)^2 + (1\,|\,1)(12\omega)^2 \equiv 0 \qquad \{t, \omega\}$$

beruhende Formel

$$\sqrt{-(1\,|\,1)}\,dt \equiv -\frac{(12\,|\,1\omega)}{(12\omega)}\,dt \equiv dp \tag{31}$$

anknüpfen.

Machen wir, wie zuvor, die Annahme, dass die zu untersuchende Curve in der Ebene $x_2 + ix_3 = 0$ liegt, so finden wir sogleich

$$\begin{aligned} &(1\,|\,\omega)_p \equiv i\omega_1 + \{\omega_2 + i\omega_3\}\,\phi'(p), \\ (32)\qquad &(2\,|\,\omega)_p \equiv (12\omega)_p \equiv \{\omega_2 + i\omega_3\}\,\phi''(p), \\ &(3\,|\,\omega)_p \equiv (13\omega)_p \equiv \{\omega_2 + i\omega_3\}\,\phi'''(p), \end{aligned}$$

u. s. w. Die Ausdrücke links aber lassen sich auch bei beliebigem regulärem Parameter bilden; man findet der Reihe nach die Formeln:

$$(1\,|\,\omega)_p \equiv \frac{(1\,|\,\omega)}{\sqrt{-(1\,|\,1)}}, \qquad (2\,|\,\omega)_p \equiv -\frac{(12\,|\,1\omega)}{(1\,|\,1)^2},$$

$$(3\,|\,\omega)_p \equiv -\frac{A}{(1\,|\,1)^2\sqrt{-(1\,|\,1)}}, \qquad (4\,|\,\omega)_p \equiv \frac{(1\,|\,1)\,B - 5(1\,|\,2)\,A}{(1\,|\,1)^4},$$

u. s. f., wo zur Abkürzung

$$
(33)\quad
\begin{aligned}
A &\equiv (13\,|\,1\omega) - 3(12\,|\,2\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{-(1\,|\,1)}}\,[(1\,|\,1)(13\omega) - 3(1\,|\,2)(12\omega)],^{*}\\
B &\equiv \frac{dA}{dt} \equiv (14\,|\,1\omega) - (13\,|\,2\omega) - 4(12\,|\,3\omega)
\end{aligned}
$$

gesetzt ist, und wo für $\sqrt{-(1\,|\,1)}$ natürlich der der Formel (31) zu entnehmende *rational* bestimmte Werth substituirt werden muss.

Hiermit haben wir nun die gesuchten Aequivalenzkriterien in einer wirklich zweckmässigen Form. Nach der Bemerkung zu Schluss des vorigen § können wir kurzweg sagen:

Bei den in Minimalebenen gelegenen krummen Linien bilden die Grössen

$$
(34)\quad f(p) \equiv \frac{A}{(1\,|\,1)(12\omega)} \quad \textit{und} \quad \frac{df}{dp} + f^2 \equiv -\frac{(1\,|\,1)B - 5(1\,|\,2)A}{(1\,|\,1)^2(12\,|\,1\omega)}
$$

ein System charakteristischer Invarianten.

Nur scheinbar ist also die Abhängigkeit dieser Grössen von dem Vector ω (der der Curvenebene fremd sein muss, so dass die Nenner in (34) nicht identisch verschwinden können, und an Stellen "allgemeiner Lage" (S. 28) auch thatsächlich von Null verschieden bleiben). Beachten wird man auch, dass $df:dp$ und f^2 absolute Umlegungsinvarianten sind, während f selbst, als absolute Invariante, nur zur Gruppe der Bewegungen gehört.

Eine Sonderstellung nehmen hier die Curven ein, für die sich $f(p) \equiv$ const. ergiebt. Sie sind Grenzfälle der zuvor betrachteten regulären gemeinen Schraubenlinien, und sollen daher *singuläre ebene gemeine Schraubenlinien* genannt werden. Gleich den regulären gemeinen Schraubenlinien bestimmt jede solche Curve eine eingliedrige continuierliche Gruppe von Bewegungen, von der sie eine Bahncurve ist. *Abweichend von den gemeinen regulären Schraubenlinien verhalten sich aber die ebenen singulären darin, dass sie weitere Bewegungen nicht zulassen.* Dem Falle $f(p) \equiv 0$ entsprechen die einzigen algebraischen Curven unter den ebenen singulären gemeinen Schraubenlinien. Es sind das Parabeln, die an gewissen Eigenschaften der Kreise theilnehmen, und deshalb als *singuläre Kreise oder parabolische Kreise* bezeichnet werden sollen.† Jeder von diesen ist zu jedem anderen congruent sowohl als auch symmetrisch, während andere gemeine Schraubenlinien in Minimalebenen Umlegungen eben so wenig zulassen als die unebenen regulären gemeinen Schraubenlinien es thun.

Natürlich umfasst jede Classe von ebenen singulären gemeinen Schraubenlinien

---

* Allgemein ist

$$
\begin{aligned}
&(12\omega)\cdot[(1\,|\,1)(13\omega) - 3(1\,|\,2)(12\omega)]\\
&\equiv [(12\,|\,13)(1\omega\,|\,1\omega) - 3(12\,|\,12)(1\omega\,|\,2\omega)] - (12\,|\,1\omega)\cdot[(13\,|\,1\omega) - 3(12\,|\,2\omega)].
\end{aligned}
$$

† Die sonst in der analytischen Geometrie vielfach auftretenden reducibelen Kreise (mit eigentlichem Mittelpunkt und verschwindendem Radius) kommen hier nicht vor, da sie nicht zu den analytischen Curven gehören. Wegen der "uneigentlichen Kreise," worunter wir die geraden Linien verstehen, siehe § 7.

$\infty^{10}(\infty^5)$ Curven der Art. Mit Ausnahme der Classe der parabolischen Kreise werden die einzelnen Classen durch die Umlegungen zu Paaren angeordnet, und dieses Verhalten ist auch bei anderen ebenen singulären Curven der normale Fall. Auf das ganz verschiedene Verhalten der krummen Linien in Euklidischen Ebenen haben wir schon hingewiesen.

§ 6. Krumme Linien auf Minimalkegeln und krumme Minimallinien.

Als Vorbereitung zur Theorie der krummen Minimallinien behandeln wir zunächst ein Beispiel zu der bis jetzt vorgetragenen Theorie, indem wir die krummen Linien auf sogenannten Minimalkegeln untersuchen.

Die *Minimalkegel* sind Kugeln von Radius Null; sie werden daher von Einigen auch Nullkugeln genannt. Jeder ist Ort aller eigentlichen Punkte, die von einem bestimmten eigentlichen Punkt, dem Scheitel des Kegels und Mittelpunkt (Symmetriepunkt) der Nullkugel, die Entfernung Null haben. Die Erzeugenden eines solchen Kegels sind die einzigen auf ihm enthaltenen Minimallinien; sonst enthält der Kegel von singulären Curven nur parabolische Kreise. Die (elementare) Untersuchung der Schnittcurve von zwei Minimalkegeln liefert den Satz, dass es nur eine einzige Familie krummer analytischer Curven giebt, die auf mehr als einem Minimalkegel enthalten sind, nämlich die *regulären* Kreise, deren jeder auf zwei Minimalkegeln liegt. Für die doppelt gekrümmten Curven auf einem Minimalkegel, die sämmtlich regulär sind, ist der Kegel constante Schmiegungskugel. Aus alledem entnimmt man ohne Mühe den Satz:

Die Frage nach der Aequivalenz von zwei auf Minimalkegeln enthaltenen krummen Linien gegenüber der Gruppe aller Bewegungen ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Aequivalenz von zwei auf demselben Minimalkegel gelegenen krummen Linien gegenüber der Gruppe aller der Bewegungen, die den Kegel (oder also dessen Scheitel) in Ruhe lassen: So viele Classen es bei der ersten Classificationsaufgabe giebt, so viele giebt es bei der zweiten. Insbesondere folgt aus § 5, dass die singulären (eigentlichen) Kreise auf einem Minimalkegel alle mit einander äquivalent sind, nur eine einzige Classe bilden, auch bei der zweiten Art der Classification vermöge einer dreigliedrigen Bewegungsgruppe; was man natürlich auch elementar beweisen kann. Ferner ist deutlich, dass die analytischen Curven auf einem Minimalkegel in Bezug auf die Spiegelung am Scheitel des Kegels ein doppeltes Verhalten aufweisen können, je nachdem sie bei dieser involutorischen Umlegung in Ruhe bleiben, oder, wie die irreducibelen Kreise, von ihr in andere Curven übergeführt werden.

Handelt es sich um die Classification der krummen analytischen Linien auf vorgeschriebenem Minimalkegel, so kann man dessen Scheitel in den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen. Es wird dann deutlich, dass mit Bezug auf die erwähnte dreigliedrige Gruppe der automorphen Bewegungen des Kegels die Bildung von Differentialinvarianten analytischer Curven auf dem Kegel nach demselben Schema erfolgt, nach dem wir auch bisher gearbeitet haben, mit dem Unterschiede jedoch, dass nunmehr auch die Coordinaten eines Curvenpunktes selbst schon in die Bildung der Semiinvarianten der Typen $(a|b)$ und (abc) in gleicher Weise eingehen können, wie bisher nur deren Differentialquotienten.

Wir bemerken nunmehr:

Wie zu jeder krummen Linie in einer Minimalebene, so gehört auch noch zu jeder krummen Linie auf einem Minimalkegel ein bis auf eine additive Constante bestimmter natürlicher Parameter p, *der sich von zwei zugehörigen Werthen des Bogens nur um vierte Einheitswurzeln unterscheidet, und übrigens bei Ausführung einer Umlegung (insbesondere bei der Spiegelung am Scheitel des Kegels) sein Vorzeichen wechselt.**

Es sei ω irgend ein constanter nicht verschwindender Vector, x der Vector, der vom Anfangspunkte der Coordinaten zum Curvenpunkte hinführt, und es mögen (unmittelbar) nur solche Punkte allgemeiner Lage (S. 20, 28) der zu untersuchenden Curve betrachtet werden, für die $(x|\omega)$ nicht verschwindet. Dann ist nach Voraussetzung

$$(x|x) \equiv 0 \qquad \{t\}$$

und daher

$$(xx'x'')(xx'\omega) \equiv (x'|x')^2(x|\omega) \qquad \{t, \omega\},$$

oder, in bequemerer Schreibart

$$(012)(01\omega) \equiv (1|1)^2(0|\omega) \qquad \{t, \omega\},$$

und ebenso

$$(012)^2 + (1|1)^3 \equiv 0 \qquad \{t\}.$$

Wir können daher mit Hülfe der Gleichungen

$$(35) \qquad \sqrt[3]{-(012)} \equiv \sqrt[2]{-(1|1)} \equiv \frac{(012)}{(1|1)} \equiv -\frac{(01\omega)}{(0|\omega)} \equiv \frac{dp}{dt}$$

die bezeichneten Wurzelgrössen und mit ihnen eine von der Wahl des Vectors

* Wir bemerken beiläufig noch, dass ein auf verwandte Art erklärter Parameter p existiert bei jeder krummen Linie, die auf der Tangentenfläche einer unzweideutig bestimmten (etwa in Parameterdarstellung gegebenen) Minimalcurve verläuft. Der sogenannte Orientierungsprocess erfolgt dann mit Hülfe von vierten Einheitswurzeln. Ferner verdient wohl Erwähnung, dass der weiterhin im Texte erklärte Parameter im Falle einer *unebenen* Curve auf Minimalkegel durch einen Grenzübergang entsteht aus dem Integral über den geodätischen Contingenzwinkel geeigneter Curven, die auf einer Kugel von nicht verschwindendem Radius $\mathfrak{R}$ verlaufen. In der That ist dieser Contingenzwinkel

$$dP \equiv \frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{(xx'x'')}{(x'|x')}\, dt.$$

In der Grenze $\mathfrak{R} = 0$ wird er illusorisch; aber

$$\lim[\mathfrak{R} \cdot dP] = dp.$$

Das an sich willkürliche Vorzeichen in der Definition von dp haben wir so bestimmt, dass längs einer Erzeugenden des Minimalkegels der Werth von dp übereinstimmt mit jenem dp, das nach § 5 zur Curventangente und zur tangierenden Minimalebene gehört.

ω unabhängige Invariante $dp:dt$ *vom Gewichte Eins* ohne Mehrdeutigkeit erklären. Das (nicht constante) Integral über dp liefert dann einen natürlichen Parameter.

Wir wollen nun zusehen, was aus den Invarianten ϕ und ψ wird, wenn p als unabhängige Veränderliche dient. Man hat dann nach (35):

$$(1|1)_p \equiv -1, \qquad (012)_p \equiv -1,$$

ausserdem $(0|0)_p \equiv 0$, und aus diesen identisch bestehenden Gleichungen ergiebt sich dann mit Hülfe der in § 1 angeführten Identitäten das ganze System der Formeln

$$\begin{array}{llll} (0|0)_p \equiv 0, & *, & *, & *, \\ (0|1)_p \equiv 0, & (1|1)_p \equiv -1, & *, & *, \\ (0|2)_p \equiv 1, & (1|2)_p \equiv 0, & *, & *, \\ (0|3)_p \equiv 0, & (1|3)_p \equiv -(2|2)_p, & *, & (3|3)_p \equiv -(2|2)_p^2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{36}$$

$$\begin{array}{ll} (012)_p \equiv -1, & (013)_p \equiv 0, \\ (023)_p \equiv (2|2)_p, & (123)_p \equiv -(2|3)_p, \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Hieraus folgt unter Anderem

$$\begin{gathered} \phi \equiv \frac{(12|12)}{(1|1)^3} \equiv (2|2)_p, \\ \psi \equiv \frac{(123)}{(1|1)^3} \equiv (2|3)_p, \qquad \psi \equiv \frac{1}{2}\frac{d\phi}{dp}.* \end{gathered} \tag{37}$$

Wir sehen hiermit, dass bei den krummen Linien auf Minimalkegeln schon die Grössen ϕ und ψ (nicht aber allgemein Krümmung und Torsion) ein System charakteristischer Invarianten bilden.

In der That ziehen jetzt, wenn $\phi \not\equiv$ const. ist, die Gleichungen

$$\phi(p) = \phi_1(p_1), \qquad \psi(p) = \psi_1(p_1), \tag{38}$$

deren zweite ja mit $d\phi : dp = d\phi_1 : dp_1$ äquivalent ist, die Gleichung $dp = dp_1$ und daher auch die Gleichung $ds^2 = ds_1^2$ nach sich. Ist aber $\phi \equiv$ const., so handelt es sich um reguläre oder singuläre Kreise, und $\phi = \phi_1$ ist dann die einzige Bedingung der Aequivalenz.

---

* Die Formel (13) für den Radius der Schmiegungskugel liefert nur

$$\psi^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d\phi}{dp}\right)^2;$$

übrigens wird sie illusorisch im Falle der eigentlichen Kreise, der von der Entwickelung im Texte nicht ausgeschlossen ist. — Wir empfehlen minder geübten Lesern, sich die Formeln (36) wirklich abzuleiten.

Als *natürliche Gleichung* einer auf dem Minimalkegel $(x|x)=0$ gelegenen krummen Linie wird man, wenn es sich nur um Curven dieser Art handelt, zweckmässig eine Gleichung der Form

$$\phi=\phi(p) \tag{39}$$

bezeichnen, wo $\phi(p)$ eine analytische Function bedeutet. Die Curve ist dann abgesehen von Bewegungen durch diese ihre natürliche Gleichung bestimmt. Curvenclassen, deren natürliche Gleichungen durch passende Verfügung über die willkürliche Constante im Ausdruck von p sich in die Formen

$$\Phi=\phi(p), \qquad \Phi_1=\phi(-p)$$

setzen lassen, gehen durch die Spiegelung am Scheitel des Kegels in einander über. Die sogenannten geraden Functionen ϕ liefern bereits alle Classen die bei diesem Process unverändert bleiben.

Wir haben uns hier auf Das beschränkt, was zum Verständniss des Folgenden nöthig sein wird. Eine vielleicht anziehendere directe Behandlung der betrachteten Curvenfamilie denken wir bei anderer Gelegenheit folgen zu lassen, wo dann eine anscheinend noch nicht bekannte Deutung des SCHWARZschen Differentialausdrucks zur Sprache kommen soll.

Wir wenden uns jetzt zu den krummen Minimallinien.

Bei den krummen Minimallinien nimmt zufolge des identischen Verschwindens der Invariante $(1|1)$ die Grösse $(2|2)$, die in der Regel nur Semiinvariante ist, die Invarianteneigenschaft an. Wegen der zweiten der Identitäten

$$(123)(12\omega)\equiv(2|2)^2(1|\omega) \qquad \{t,\omega\},$$

$$(123)^2+(2|2)^3\equiv 0 \qquad \{t\},$$

kann sie nicht identisch verschwinden, und an jeder solchen regulären Stelle, wo bei regulärer Parameterdarstellung die Invarianten (123) und $(2|2)$ auch thatsächlich nicht verschwinden, wird auch die Covariante (12ω) nicht identisch verschwinden. Reguläre Punkte dieser besonderen Art wollen wir *Punkte allgemeiner Lage* auf der Minimalcurve nennen. Diese Punkte allgemeiner Lage sind also solche, deren Schmiegungsebene mit der Curve nur eine dreipunktige Berührung, und deren Tangente (folglich) mit der Curve nur eine zweipunktige Berührung hat. Das Vorzutragende bezieht sich (unmittelbar) nur auf diese Stellen; überdies werden wir annehmen, dass der willkürliche Vector ω nicht gerade die Richtung der Curventangente hat, so dass auch $(1|\omega)$ nicht verschwindet.

Auf Grund der angeführten identischen Gleichungen können wir nunmehr zunächst zwei Wurzelgrössen und eine von dem Vector ω unabhängige absolute Invariante $dp^2 : dt^2$ *vom Gewichte zwei* eindeutig erklären wie folgt:

$$(40) \qquad \sqrt[3]{-(123)} \equiv \sqrt[2]{-(2\,|\,2)} \equiv \frac{(123)}{(2\,|\,2)} \equiv -\frac{(12\omega)}{(1\,|\,\omega)} \equiv \left(\frac{dp}{dt}\right)^2.$$

Durch Ausziehen einer Quadratwurzel entsteht dann eine zweiwerthige mit $dp : dt$ zu bezeichnende Invariante vom Gewichte Eins, und durch Integration über dp schliesslich ein *natürlicher Parameter* p, der bei den krummen Minimallinien die Stelle des Bogens bei regulären Curven vertritt, und, nach unserer Herleitung, gleich jenem Bogen bestimmt ist bis auf das Vorzeichen und eine additive Constante. Wie bei dem Bogendifferential kann zwischen den beiden Werthen des Differentials dp auf der Curve ein analytischer Zusammenhang bestehen oder nicht.

Benutzen wir jetzt irgend eine der Functionen p als unabhängige Veränderliche, so erhalten wir durch Anheftung des Vectors x'_p am Anfangspunkte der Coordinaten eine krumme Linie, Ort des Endpunktes von x'_p, die auf dem zu dem genannten Punkte gehörigen Minimalkegel verläuft. Durch Aenderung des Vorzeichens von dp entsteht, je nach den soeben bezeichneten Umständen, dieselbe Curve nochmals in anderer Parameterdarstellung, oder eine zweite von der ersten verschiedene Curve auf demselben Minimalkegel. In beiden Fällen, deren an sich vielleicht nicht unwichtige Unterscheidung hier nicht in Betracht kommt, bleibt die ganze construierte Figur ungeändert bei der Spiegelung am Anfangspunkte der Coordinaten.

Die gefundene autosymmetrische Curve oder die gefundene Zusammenstellung von zwei spiegelbildlich-gleichen Curven können wir "das sphärische Bild der krummen Minimallinie" nennen. Es folgt dann:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz (Congruenz) zweier krummer Minimallinien besteht in der Aequivalenz ihrer sphärischen Bilder.

Zu dem sphärischen Bilde einer krummen Minimallinie gehören aber zwei (abgesehen von den willkürlich bleibenden additiven Constanten) entgegengesetzt-gleiche natürliche Parameter der durch Nr. (35) erklärten Art, und diese sind, wie man sofort erkennt, identisch mit den beiden Werthen des durch (40) erklärten Parameters p. Als charakteristische Invarianten der krummen Minimallinien können also gelten die für das sphärische Bild hergestellte Invariante ϕ (Nr. 37) und *das Quadrat* ihres Differentialquotienten nach p. Der Ausdruck von ϕ ist jetzt $(3\,|\,3)_p$. Aendern wir die Bezeichnung, und führen wir an Stelle von p einen unbestimmt gelassenen Parameter ein, so erhalten wir die Lösung des Aequivalenzproblems für krumme Minnimallinien in dem Satze:

Charakteristische Invarianten sind im Falle der krummen Minimallinien die Grössen:

$$(41)\quad \begin{aligned} F &\equiv (3\,|\,3)_p \equiv -\frac{4\cdot(2\,|\,2)(2\,|\,4)+8\cdot(2\,|\,2)(3\,|\,3)-15\cdot(2\,|\,3)^2}{4\cdot(2\,|\,2)(123)}, \\ \left(\frac{dF}{dp}\right)^2 &\equiv -\frac{1}{16\cdot(2\,|\,2)^6(123)}\cdot[4\cdot(2\,|\,2)^2(2\,|\,5)+20\cdot(2\,|\,2)^2(3\,|\,4) \\ &\quad -42\cdot(2\,|\,2)(2\,|\,3)(2\,|\,4)-54\cdot(2\,|\,2)(2\,|\,3)(3\,|\,3)+75\cdot(2\,|\,3)^3]^2. \end{aligned}$$

Diese Grössen sind beide hier absolute rationale Bewegungsinvarianten, während sie bei Ausführung einer Umlegung *beide* das Vorzeichen wechseln. An Stelle der zweiten kann man auch $3(dF:dp)^2-20F^3$ benutzen, eine rationale Invariante, deren Zähler und Nenner um vier Einheiten verringerte Gewichte haben, der aber ein weniger einfaches Bildungsgesetz zuzukommen scheint.

Als *natürliche Gleichung* irgend einer krummen Minimallinie werden wir jetzt eine analytische Abhängigkeit der Form

$$F=f(p)$$

bezeichnen. Jede Abhängigkeit der Form

$$F=f(\pm p+\text{const.})$$

gehört dann noch zu derselben Classe unter einander congruenter krummer Minimallinien. Die Bestimmung einer solchen aus einer ihrer natürlichen Gleichungen erfordert nach dem Dargelegten die Integration einer RICCATIschen (oder auch einer SCHWARZschen) Differentialgleichung (womit das sphärische Bild der Curve bekannt wird) und drei nachfolgende, von einander unabhängige Quadraturen.

Ausgezeichnet ist der Fall $F\equiv$ const. Die zugehörigen Minimalcurven sind Grenzfälle regulärer gemeiner Schraubenlinien (S. 24); sie theilen mit diesen die Eigenschaft, dass jede eine eingliedrige continuierliche Gruppe von Bewegungen bestimmt, von der sie eine Bahncurve ist. Diese Curven, deren jede, gleich den regulären gemeinen Schraubenlinien $2.\infty^2(2.\infty^1)$ Bewegungen zulässt, heissen *gemeine Minimalschraubenlinien.* Ist $F\not\equiv 0$, so hat man transcendente Curven vor sich, die auf je einem Rotationscylinder liegen, und zu sphärischen Bildern Paare von regulären Kreisen haben. Der Annahme $F\equiv 0$ aber entsprechen rationale Curven 3. Ordnung, die auf den schon (S. 24) erwähnten parabolischen Cylindern verlaufen. Diese Curven haben den absoluten Kegelschnitt als sogenannte Osculante*, und ihre sphärischen Bilder sind Paare singulärer oder parabolischer Kreise (S. 24). Jede dieser sehr speciellen Curven gestattet übrigens eine zweigliedrige continuierliche Gruppe von Aehnlichkeits-

* Die uneigentliche Ebene ist Schmiegungsebene der Curve, und durchdringt deren Tangentenfläche, ausser in der (doppelt zählenden) zugehörigen Tangente, im absoluten Kegelschnitt.

transformationen. Insbesondere bestimmen diese Curven 3. Ordnung, gleich den regulären Kreisen mit gegebenem Quadrate des Radius und den parabolischen Kreisen, aber abweichend von allen übrigen gemeinen Schraubenlinien, auch gegenüber der Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen nur eine einzige Classe äquivalenter Figuren.

Wir haben hiermit das Ziel unserer Untersuchung erreicht. Die analytischen krummen Linien, geometrische Oerter von je ∞^2 complexen Punkten, sind in allen Fällen durch "natürliche Gleichungen" dargestellt worden, und die Kriterien für die Aequivalenz zweier solcher Curven in Bezug auf complexe Euklidische Bewegungen haben wir so weit entwickelt, als sie sich überhaupt allgemein entwickeln lassen.

Eine verwandte Theorie kann man natürlich durchführen für die analytischen Oerter von ∞^2 Ebenen, die, wenn man von den geraden Linien absieht, entweder Örter von Schmiegungsebenen doppelt gekrümmter Curven oder Kegel (insbesondere auch Cylinder) sind. Im ersten Falle sind die aufzustellenden Aequivalenzkriterien Transformationen der bereits gefundenen; ihre Darstellung in einer wirklich sachgemässen Form würde jedoch weitere algebraische Entwickelungen über Bewegungsinvarianten nöthig machen. Wir verzichten darauf, eine solche Untersuchung allgemein durchzuführen, wollen aber wenigstens noch die krummen Minimallinien von dieser Seite betrachten, da diese Curven bekanntlich ja gerade als Oerter ihrer Schmiegungsebenen sich auf besonders einfache Weise finden und analytisch darstellen lassen.

Wir reproducieren zunächst, in wenig abweichender Bezeichnung, die bekannte Formel, die zur Darstellung irgend einer analytischen Mannigfaltigheit von ∞^2 (nach der üblichen Schreibart ∞^1) *nicht durchweg parallelen* Minimalebenen dient:

$$(1 - s^2)\cdot y_1 + i(1 + s^2)\cdot y_2 - 2s\cdot y_3 - 2i\cdot f(s) = 0.^* \tag{42}$$

Nehmen wir dann an, dass der dritte Differentialquotient $f_3(s) \equiv f'''(s)$ der analytischen Function $f(s)$ nicht identisch verschwindet, so umhüllen die Ebenen (42) eine krumme Minimallinie, als deren Schmiegungsebenen, wobei jedoch die in der Form (42) nicht darstellbaren Minimalebenen, nämlich die zu der Gleichungsform $y_1 - iy_2 =$ const. gehörigen (zunächst) ausgeschlossen bleiben.†

Differentiirt man den Ausdruck auf der linken Seite von (42) bei constantem y zweimal nach dem Parameter s, so gelangt man, durch Auflösung der erhal-

* Wir weichen von dem Ueblichen etwas ab in der Bezeichnung. Wir haben dafür unsere Gründe [Vgl. § 8 und American Journal of Mathematics, vol. 29 (1907), pp. 146, 154]. Es lohnt aber wohl nicht, näher darauf einzugehen. Vergleiche jedoch die Anmerkung zu der Formel Nr. 56.

† Durch Einführung von geeigneten homogenen Veränderlichen kann man natürlich auch diese Stellen in die Betrachtung einbeziehen.

tenen Gleichungen, zu den Formeln

$$(43)\qquad \begin{aligned} x_1 &\equiv i\left\{f - sf_1 - \frac{1-s^2}{2}f_2\right\}, \\ x_2 &\equiv \left\{f - sf_1 + \frac{1+s^2}{2}f_2\right\}, \qquad \{f_3 \neq 0\} \\ x_3 &\equiv -i\{f_1 - sf_2\}, \end{aligned}$$

die zur Darstellung irgend welcher *krummer* Minimallinien dienen ($df : ds \equiv f_1$, u. s. w.). Es folgt dann

$$(44)\qquad \frac{dx_1}{ds} \equiv -i\frac{1-s^2}{2}\cdot f_3, \qquad \frac{dx_2}{ds} \equiv \frac{1+s^2}{2}\cdot f_3 \qquad \frac{dx_3}{ds} \equiv is\cdot f_3,$$

so dass die Gleichung $(x'|x') \equiv 0 \ \{s\}$ erfüllt ist. Die Differentialvectoren x'_s, x''_s, $\cdots$ enthalten nur den dritten und höhere Differentialquotienten der Function $f(s)$. Insbesondere folgt

$$(45)\qquad (2|2)_s \equiv -f_3^2, \qquad (123)_s \equiv -f_3^3.$$

Die erklärten *Stellen allgemeiner Lage* sind also, soweit ihre Schmiegungsebenen nicht zu den ausgeschlossenen ($s = \infty$) gehören, identisch mit denen, für die f_3 nicht verschwindet. Weiter folgt

$$(46)\qquad \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 \equiv \frac{(123)_s}{(2|2)_s} \equiv f_3(s),$$

so dass

$$(47)\qquad p \equiv \int \sqrt{f_3(s)}\,ds$$

gesetzt werden kann. *Die erwähnten beiden grossen Familien von Minimalcurven unterscheiden sich also hier dadurch, dass bei der einen die beiden Werthe von $\sqrt{f_3(s)}$ auf der Curve analytisch zusammenhängen, bei der anderen nicht.*

Nunmehr kennt man vermöge der Gleichungen

$$(48)\qquad \frac{dx_1}{dp} \equiv -i\frac{1-s^2}{2}\cdot\sqrt{f_3}, \qquad \frac{dx_2}{dp} \equiv \frac{1+s^2}{2}\cdot\sqrt{f_3}, \qquad \frac{dx_3}{dp} \equiv is\sqrt{f_3}$$

auch das sphärische Bild der Minimalcurve (43). Schliesslich findet sich

$$(49)\qquad \begin{aligned} &(2|3)_s \equiv -f_3f_4, \qquad (2|4)_s \equiv -3f_3f_5 + 3f_4^2, \\ &(2|5)_s \equiv -4f_3f_6 + 6f_4f_5, \qquad (3|3)_s \equiv 2f_3f_5 - 4f_4^2, \\ &(3|4)_s \equiv f_3f_6 - 3f_4f_5. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke der angeführten charakteristischen Invarianten werden also jetzt:

$$(50)\qquad \begin{aligned} F &\equiv (3|3)_p \equiv \frac{4f_3f_5 - 5f_4^2}{4f_3^3}, \\ \left(\frac{dF}{dp}\right)^2 &\equiv \frac{1}{16f_3^9}\cdot[4f_3^2f_6 - 18f_3f_4f_5 + 15f_4^3]^2. \end{aligned}$$

In der transformirten Gestalt (50) leisten die gefundenen Aequivalenzkriterien natürlich nicht ganz so viel wie in ihrer ursprünglichen, da nunmehr s der Parameter ist, dieser also specielle Eigenschaften hat. Ein anderer Weg, zu den Kriterien (50) zu kommen, würde der sein, dass man von vorn herein die Minimalebenen als Raumelemente betrachtet, und nun für die Bewegungsgruppe, die unter der nunmehrigen Voraussetzung eine Gruppe in einer vierfach (bei Zählung complexer Dimensionen zweifach) ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist, direct eine Invariantentheorie zu entwickeln sucht. Auf solche Art ist S. Lie unserem letzten Satze bereits sehr nahe gekommen. Welchen Einwendungen aber Lies Theorie unterliegt, haben wir in der Einleitung schon angedeutet und an anderer Stelle ausgeführt.*

Die aufgestellten Gleichungen liefern p und F, wenn die Function $f(s)$ bekannt ist. Die Bestimmung der natürlichen Gleichung einer krummen Minimallinie erfordert dann also eine Quadratur und die Lösung eines Eliminationsproblems. Umgekehrt erhält man s aus der natürlichen Gleichung durch Integration einer Schwarzschen Differentialgleichung

$$\frac{2s's''' - 3s''s''}{s's'} \equiv -F(p). \tag{51}$$

Schliesslich scheint es uns noch nützlich, anzumerken, durch was für eine Function $f(s)$ zu ersetzen ist, wenn man die krumme Minimallinie einer vorgeschriebenen Bewegung unterwerfen will. Wir drücken diese in homogenen Ebenencoordinaten aus,

$$\begin{aligned} u_0^* &= a_{00}u_0 + a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3, \\ u_1^* &= \quad * \qquad a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\ u_2^* &= \quad * \qquad a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \\ u_3^* &= \quad * \qquad a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3, \end{aligned}$$

und stellen die Coefficienten $a_{00}, a_{11} \cdots a_{33}$ in bekannter Weise dar durch die Parameter Eulers.† Dann ergiebt sich

$$s^* \equiv \frac{(\alpha_0 - i\alpha_3)s - (\alpha_2 - i\alpha_1)}{(\alpha_2 + i\alpha_1)s + (\alpha_0 + i\alpha_3)}, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &[(\alpha_2 + i\alpha_1)s + (\alpha_0 + i\alpha_3)]^2 \cdot f^*(s^*) \\ &\equiv a_{00}\cdot f(s) - \left\{a_{01}\cdot -i\frac{1-s^2}{2} + a_{02}\cdot\frac{1+s^2}{2} + a_{03}\cdot is\right\}; \end{aligned} \tag{53}$$

* Den gleichen Bedenken unterliegt auch zum Theil eine Untersuchung über Minimalcurven, von der neuerdings Herr E. Vessiot einige Andeutungen veröffentlicht hat. [Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 140 (1905), pp. 1381–1384.] Doch wollen wir nicht unterlassen hervorzuheben, dass in dieser Arbeit, die dem Verfasser erst während des Druckes bekannt geworden ist, der natürliche Parameter p, oder eine damit äquivalente Function des Ortes, ebenfalls vorkommt.

† S. z. B. Mathematische Annalen, Bd. 39 (1891), S. 528.

durch Substitution der Werthe

$$s \equiv \frac{(\alpha_0+i\alpha_3)s^*+(\alpha_2-i\alpha_1)}{-(\alpha_2+i\alpha_1)s^*+(\alpha_0-i\alpha_3)}, \quad (\alpha_2+i\alpha_1)s+(\alpha_0+i\alpha_3) \equiv \frac{a_{00}}{-(\alpha_2+i\alpha_1)s^*+(\alpha_0-i\alpha_3)}$$

erhält man dann die Function $f^*(s^*)$, die zur transformierten Curve gehört. Versteht man unter a, b, c, d, l, m, n Constante, so dass $ad - bc \neq 0$ ist, so werden demnach alle krummen Minimallinien, die mit einer vorgelegten zur selben Classe gehören, geliefert durch die Formel

$$(54) \qquad f^*(s^*) \equiv \frac{(cs^* - a)^2}{ad - bc} \cdot f\left\{\frac{ds^* - b}{-cs^* + a}\right\} + l + ms^* + n(s^*)^2.$$

Beispielsweise erhält man alle transcendenten gemeinen Minimalschraubenlinien, wenn man

$$f \equiv \text{const. } s \log s \qquad \{\text{const.} \neq 0\}$$

setzt, und alle algebraischen Curven der Art, wenn man für $f(s)$ (zum Beispiel) eine der Functionen

$$f(s) \equiv \frac{s^3}{6}, \qquad f(s) \equiv -\frac{1}{6s}$$

substituiert.

Bemerkenswerth scheint uns noch, dass man die Formeln (52) und (53) in eine einzige Gleichung zusammenfassen kann, wenn man sich der vom Verfasser eingeführten Bewegungsparameter* und gleichzeitig jener "duale Grössen" genannten Grössensysteme bedient, deren zweite Einheit ϵ der Gleichung $\epsilon^2 = 0$ genügt.† Setzt man nämlich

$$(55) \qquad A_\kappa = \alpha_\kappa + \epsilon\beta_\kappa \quad (\kappa = 0, 1, 2, 3), \qquad S = s + \epsilon f,$$

so wird, wenn entsprechend $S^* = s^* + \epsilon f^*$ ist,

$$(56) \qquad S^* \equiv \frac{(A_0 - iA_3)S - (A_2 - iA_1)}{(A_2 + iA_1)S + (A_0 + iA_3)}.‡$$

---

* Siehe das vorangehende Citat. Uebrigens gilt die Gleichung (56) auch dann, wenn die a. a. O. angenommene Relation $\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$ nicht besteht.

† Ebenda S. 521, 560, und *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1903) II, § 23.

‡ Man sieht hieraus, dass die Bezeichnung des von den Punktcoordinaten freien Gliedes in der Formel (42) mit $-2if$ zweckmässig war.

Für Leser die mit der in der eben genannten Schrift entwickelten *dual-projectiven Geometrie* bekannt sind, bemerken wir noch, dass der Hauptinhalt der Formel (56) auch so beschrieben werden kann, dass man etwa sagt: "*Die Gruppe der Euklidischen Bewegungen mit der Minimalebene als Raumelement verhält sich zur Gruppe der dualen Collineationen mit dem Strahl als Raumelement ebenso wie die allgemeine projective Gruppe in zwei (homogenen) Veränderlichen zur allgemeinen projectiven Gruppe in drei (homogenen) Veränderlichen.*" Näheres über diese Analogie findet man in der *Geometrie der Dynamen* S. 399–401, wo jedoch die Gleichung (56), die dort nicht gebraucht wurde, nicht *explicite* vorkommt. Vgl. auch das ebenda S. 339, 340 über die zur Bewegungsgruppe correlative Gruppe Gesagte, so wie den Satz auf Seite 348; ferner: Jahresbericht der Deutschen Mathematikvereinigung 1902, S. 331 und Sitzungs-

§ 7. Beispiele natürlicher Curvenfamilien.

Auf Einzelheiten der Curventheorie einzugehen ist in dieser lediglich den Grundlagen gewidmeten Untersuchung nicht der Ort. Von grundsätzlicher Bedeutung ist indessen die Frage, wie die grossen Curvenfamilien, mit denen man sich aus geometrischem Anlasse näher zu befassen pflegt, in sachgemässer Weise zu charakterisieren seien. Mehrere derartige Familien haben wir schon zu betrachten gehabt. Mit Ausnahme der Familie aller geraden Linien und der Familie der Minimalgeraden waren diese sämmtlich charakterisiert durch invariante Systeme von Differentialgleichungen *und Differential-Ungleichungen*, oder auch nur durch Differential-Ungleichungen. Im Gegensatz zu diesen, wie wir sagen dürfen, *künstlichen* Familien, in denen gewisse Curven einer vollständigen Disjunction zu liebe, oder zu sonstigen speciellen Zwecken zusammengefasst werden, stehen die *natürlichen* Familien, die wie die geraden Linien oder die Minimalgeraden lediglich durch invariante Systeme von Differential*gleichungen* charakterisiert werden, und die daher jede Curve umfassen, die Grenzlage von irgend welchen Curven der Familie ist*; denen also der Charakter einer gewissen (beschränkten) *Abgeschlossenheit* zukommt. Wir werden das Wort indessen in einem noch engeren Sinne brauchen, indem wir von einer "natürlichen" Familie weiter verlangen, dass sie *ein einziges analytisches Continuum* (von endlich-oder unendlich-vielen Dimensionen) bilde; dass man nämlich, durch Variation der einzelnen Curve, von jedem zugehörigen Individuum zu jedem anderen kommen könne, ohne durch Curven hindurchgehen zu müssen, die noch weiteren (invarianten) Systemen von Differentialgleichungen Genüge leisten. Danach bilden die singulären Curven zum Beispiel nicht eine natürliche Familie, wohl aber die Minimalcurven, und ebenso die ebenen singulären Curven. Die im Allgemeinen überaus schwierige Frage, welche Curven überhaupt durch ein gegebenes System von invarianten Differentialgleichungen charakterisiert werden, und wie diese Curven sich auf natürliche Familien vertheilen, scheint uns ein gewisses Interesse zu haben. Wir behandeln daher noch einige Beispiele, um auf diese Art wenigstens einigen Einblick in die (durch die Bewegungsgruppe erzeugte) Structur der Mannigfaltigkeit zu gewinnen, die von den analytischen Curven gebildet wird.

---

berichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde, Jahrg. 1904, S. 57, wo Transformationen orientierter Strahlen ähnlich behandelt werden.

Weitere Entwickelungen verwandten Inhalts — auch Anwendungen auf Minimalflächen — findet man in einem Aufsatze des Herrn Jos. Grünwald: Monatshefte für Mathematik und Physik, XVII. Jahrgang (1906), S. 81–136.

* Wir erinnern an das in der Einleitung Gesagte: Gleichungen, die nur bei Bestehen gewisser Ungleichungen aufgestellt werden können, betrachten wir als Das, was sie wirklich sind, nämlich als Systeme von Gleichungen und Ungleichungen. Andernfalls würde das im Texte Vorgetragene unzutreffend sein.

Die Curven constanter Torsion.

Damit eine *reguläre* Curve constante Torsion habe, ist nothwendig und hinreichend das Bestehen der Gleichung

$$(57) \qquad (12|12)(124)-2(12|13)(123)\equiv 0 \qquad \{t\}.$$

Diese in den Differentialquotienten höchster (vierter) Ordnung lineare Gleichung nennen wir "die Differentialgleichung der Curven constanter Torsion." *Derselben Gleichung genügen dann, als uneigentliche "Curven constanter Torsion," oder "Curven von uneigentlich-constanter Torsion," sämmtliche singulären Curven,* nämlich erstens die Minimalcurven, deren Torsion unendlich ist, zweitens die Curven in Minimalebenen, darunter die Geraden, bei denen allen der Torsionsbegriff überhaupt illusorisch ist. Die Unterscheidung von eigentlichen und uneigentlichen "Curven constanter Torsion" deckt sich also mit der Unterscheidung von regulären Curven constanter Torsion und von singulären Curven. Beide zusammen bilden eine einzige natürliche Familie.

Die Curven constanter Krümmung.

Auch die Gleichung

$$(58) \qquad (1|1)(12|13)-3\cdot(1|2)(12|12)\equiv 0 \qquad \{t\}$$

definiert eine einzige natürliche Curvenfamilie, die wiederum alle singulären Curven umfasst. Indessen werden als "*eigentliche*" Curven constanter Krümmung oder als Curven von eigentlich-constanter Krümmung ausser den regulären Curven der Art auch die ebenen singulären Curven anzusehen sein, mit Ausnahme der Minimalgeraden; *uneigentliche* Curven constanter Krümmung sind die Minimallinien (mit Einschluss der geraden unter ihnen), Curven, bei denen der Krümmungsbegriff seinen Sinn verliert.

Die Curven von vorgeschriebener constanter Krümmung.

Ungleich den beiden zuvor betrachteten Fällen definiert die Gleichung

$$(59) \qquad \frac{1}{R^2}(1|1)^3-(12|12)\equiv 0 \qquad \{t\}$$

bei endlichem constantem Werthe von $1/R^2$ nicht eine einzige natürliche Curvenfamilie, sondern deren zwei verschiedene. Sie wird nämlich, ausser durch die (regulären oder im Falle $1/R=0$ ebenen singulären) Curven, denen die bestimmte Krümmung $\pm 1/R$ zukommt, auch durch alle Minimalcurven befriedigt, die als *Curven der uneigentlich-constanten Krümmung* $\pm 1/R$ insofern anzusehen sind, als unter den beliebig bleibenden Werthen für die "Krümmung" einer solchen Curve sich eben auch der constante Werth $\pm 1/R$ befindet.*

* Die durch die Gleichung $(1|1)\equiv 0$ $\{t\}$ definierten Minimal curven können als die singulären, die übrigen genannten Curven als die regulären Lösungen der Gleichung (53) bezeichnet werden.

Die Curven eigentlich-constanter Krümmung können überhaupt nicht durch eine Differentialgleichung gekennzeichnet werden, sondern nur durch das System der Gleichung (53) und der Ungleichung $(1|1) \not\equiv 0 \ \{t\}$. Aehnliches gilt in anderen Fällen.

Die sphärischen Curven.

Die Gleichung

$$(60) \quad (1|1)(134) - 3(1|2)(124) + [3(2|2) + 4(1|3)](123) \equiv 0 \qquad \{t\}$$

ergiebt sich, wenn man ausdrückt, dass der Schnittpunkt von drei consecutiven Normalebenen einer doppelt gekrümmten regulären Curve eine unveränderliche Lage hat. Ebenso kommt man zu ihr von der Gleichung (10) aus, wenn man zunächst $dy : ds \equiv 0$ setzt, und dann an Stelle des Bogens einen unbestimmt bleibenden Parameter einführt.* Wir nennen diese Gleichung "*die Differentialgleichung der sphärischen Curven*", sphärisch also jede Curve die ihr genügt. Dazu gehören alle ebenen regulären oder singulären Curven, die mit Ausnahme der regulären und parabolischen Kreise, sowie der Minimalgeraden, als *uneigentlich-sphärisch* zu bezeichnen sind. (Man vergleiche das in der Einleitung über die *reellen* sphärischen Curvenzüge Gesagte).

Curven mit vorgeschriebenem Quadrate des Radius der Schmiegungskugel.

Jeder vorgeschriebene endliche Werth von $\mathfrak{R}^2$ (Siehe Nr. 12) (und ebenso der in gewissem Sinne noch bestimmte Werth ∞) bestimmt eine Gesammtheit analytischer Curven. Um die hier vorliegenden Verhältnisse recht zu verstehen, muss man beachten, dass in zwei einander theilweise durchdringenden Fällen überhaupt nicht von einem bestimmten Werthe der Grösse $\mathfrak{R}^2$ die Rede sein kann. Es sind das erstens die regulären Kreise sammt ihren weiterhin noch zu erörternden singulären Grenzfällen. Durch jeden regulären Kreis gehen ja Kugeln mit allen möglichen Radien. Zweitens aber liefern die ebenen singulären Curven ebenfalls nicht bestimmte Werthe von $\mathfrak{R}^2$. Sieht man von den parabolischen (eigentlichen) Kreisen und von den geraden Linien ab, so hat man noch eine bestimmte uneigentliche "Schmiegungskugel"; diese ist in die Curvenebene ausgeartet, die eine Minimalebene ist. Diese uneigentliche Kugel hat keinen irgendwie bestimmten Radius, wie ein Blick auf die Formel (12) es unmittelbar zeigt. *Die regulären Kreise mit ihren Ausartungen und die krummen Linien in Minimalebenen werden also bei jedem vorgeschriebenen Werthe von $\mathfrak{R}^2$ als Lösungen der Gleichung*

$$(61) \quad (1|1)^2(13|13) - 6(1|1)(1|2)(12|13) + 9(1|2)^2(12|12) - \mathfrak{R}^2(123)^2 \equiv 0 \qquad \{t\}$$

* Die Differentialinvariante auf der linken Seite von (60) hat *unter der Voraussetzung, dass* $(123) \neq 0$, $(1|1) \neq 0$ *ist*, den Werth

$$[(134)_s - (2|2)_s(123)_s] \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^{10} \equiv \frac{1}{R^3 T^2}\left\{\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)\right\} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^{10},$$

wofern s ein Werth des Curvenbogens ist. Das Quadrat $1/R^2$ der Krümmung und die Torsion $1/T$ haben dann bestimmte und von 0 und ∞ verschiedene Werthe.

auftreten. Diese Gleichung selbst aber definiert, wie übrigens schon aus bekannten Untersuchungen hervorgeht, nicht eine einzelne natürliche Curvenfamilie (was damit zusammenhängt, dass sie in den höchsten vorkommenden Differentialquotienten von höherem als dem ersten Grade ist).

Die Gleichung (61) *wird durch zwei* (*und nicht mehr*) *verschiedene natürliche Familien von Curven erfüllt, nämlich durch die Curven auf Kugeln vom Radius* $\pm\mathfrak{R}$, *und durch die Curven von der constanten Krümmung* $\pm 1/\mathfrak{R}$. *Beide Familien durchdringen einander, wenn* $\mathfrak{R} \neq 0$ *ist, in der Gesammtheit der regulären Kreise vom Radius* $\pm\mathfrak{R}$, *und ausserdem in der Familie der ebenen singulären Curven, die als " Curven auf besonderen uneigentlichen Kugeln "* (*nämlich auf uneigentlichen Kugeln von unbestimmtem Radius*) *zu den sphärischen Curven zu rechnen sind.**

Im Falle $\mathfrak{R} = 0$ besteht die erste Familie aus den *Curven auf Minimalkegeln*, sammt den *Curven in Minimalebenen*, die als " uneigentliche Minimalkegel," nämlich als Grenzfälle von (" eigentlichen ") Minimalkegeln zu betrachten sind. Die zweite Familie aber besteht im Falle $\mathfrak{R} = 0$ aus den *Minimalcurven.* In der That ergiebt sich $\mathfrak{R}^2 = 0$ bei jeder krummen Minimallinie an jeder der von uns als " Punkt allgemeiner Lage " bezeichneten Stellen $\{(123) \neq 0\}$. Die zugehörige Schmiegungskugel ist ein Minimalkegel, der im Curvenpunkte selbst seinen Scheitel hat. Bei analytischer Fortsetzung ergiebt sich dann $\mathfrak{R}^2 = 0$ für die ganze Curve. Die geraden Minimallinien gehören dann noch " uneigentlich " zu dem Werthe $\mathfrak{R}^2 = 0$.

Die behaupteten Thatsachen werden in Evidenz gesetzt durch eine Identität, deren Ableitung wir, als eine nützliche Uebung, dem Leser überlassen wollen. Wir schreiben zur Abkürzung

$$A \equiv (1|1)^2(13|13) - 6(1|1)(1|2)(12|13) + 9(1|2)^2(12|12),$$

$$B \equiv (1|1)(134) - 3(1|2)(124) + [3(2|2) + 4(1|3)](123),$$

$$C \equiv (1|1)(12|13) - 3\ (1|2)(12|12).$$

Dann ist

$$(124)\cdot A - \tfrac{1}{2}(123)\ A' \equiv B \cdot C \tag{62}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von (60) ist der Zähler von $d\mathfrak{R}^2 : dt$. Hat also, bei gegebener Curve, $\mathfrak{R}^2$ einen bestimmten und constanten endlichen Werth, ist $(123) \mathrel{\equiv\!\!\!\!/} 0$, so ist die Curve entweder uneben und sphärisch ($B \equiv 0$), und sie liegt dann auf irgend einer eigentlichen Kugel von Radius $\pm\mathfrak{R}$; oder die Curve ist eine unebene Curve von constanter Krümmung ($C \equiv 0$), im Falle

* Die eigentlichen und uneigentlichen Curven der constanten Krümmung $\pm 1/\mathfrak{R}$ sowie alle Kreise kann man als singuläre Lösungen der Gleichung (61), den übrigen " regulären " Lösungen, also den unebenen Curven auf eigentlichen Kugeln vom Radius $\pm\mathfrak{R}$ gegenüberstellen $\{\mathfrak{R} \neq 0\}$.

$\mathfrak{R}^2 \equiv 0$, $A \equiv 0$ insbesondere eine uneigentliche Curve der Art, nämlich irgend eine krumme Minimallinie. Im zweiten der beiden unterschiedenen Fälle ($C \equiv 0$) ist die Gleichung (61) eine Folge der Gleichung

$$(1\,|\,1)^3 - \mathfrak{R}^2(12\,|\,12) \equiv 0 \qquad \{t\}. \tag{63}$$

Da nämlich aus (63) $C \equiv 0$ fliesst, und umgekehrt auch $C \equiv 0$ eine Gleichung der Form (63) mit constantem $\mathfrak{R}^2$ nach sich zieht, so zeigt die ohne Weiteres abzuleitende Identität

$$(12\,|\,12)\,[A - \mathfrak{R}^2(123)^2] \equiv (123)^2\,[(1\,|\,1)^3 - \mathfrak{R}^2(12\,|\,12)] + C^2, \tag{64}$$

dass entweder $(12\,|\,12) \equiv 0$ oder $A - \mathfrak{R}^2(123)^2 \equiv 0$ sein muss. Das erste ist hier — da $(123) \not\equiv 0$ — nur so möglich, dass $(1\,|\,1) \equiv 0$ und dann auch $A \equiv 0$, $\mathfrak{R}^2 \equiv 0$ ist. Dies ist der Fall der krummen Minimallinien.

Hat ferner $\mathfrak{R}^2$, wenn man von der Curve als dem Gegebenen ausgeht, keinen bestimmten Werth, so ist von vorn herein $A \equiv 0$, $(123) \equiv 0$. Zufolge der zweiten dieser Gleichungen ist dann $B \equiv 0$, und zufolge (64) auch $C \equiv 0$. Die Curve ist eben und gehört zu den eigentlichen oder uneigentlichen Curven von constanter Krümmung. Ist sie regulär, so ist sie irgend ein regulärer Kreis, *dessen quadrierter Radius nicht nothwendig den vorgeschriebenen Werth* $\mathfrak{R}^2$ *zu haben braucht.* Ist sie singulär, so bleibt sie im Uebrigen völlig beliebig.

Die aufgeführten Fälle bilden eine vollständige Disjunction. Zu betrachten bleibt aber noch der Fall $\mathfrak{R}^2 = \infty$, in dem die Gleichung (61) ihren Sinn verliert, und durch die Gleichung $(123) \equiv 0$ zu ersetzen ist. Zu den aufgezählten Curven mit eigentlich- oder uneigentlich-constantem endlichem Werthe von $\mathfrak{R}^2$ kommen natürlich noch die in Euklidischen Ebenen gelegenen Curven von nicht-constanter Krümmuug, als solche, deren Schmiegungskugel den in gewissem Sinne bestimmten constanten Radius $\mathfrak{R} = \infty$ hat.

Auf ähnliche Art wie die geschilderten lassen sich noch weitere Beispiele behandeln. Um aber keiner Täuschung über die Tragweite der angestellten Betrachtungen Vorschub zu leisten, will der Verfasser nicht unterlassen, hervorzuheben, dass ihm eine sichere Methode nicht bekannt ist, mit deren Hülfe man vorgelegte invariante Curvenfamilien durch invariante Differentialgleichungen oder invariante Systeme von Differentialgleichungen kennzeichnen könnte. Es können sich Schwierigkeiten ergeben auch in Fällen, wo man ohne nähere Kenntniss des Gegenstandes es nicht vermuthen würde. Als ein Beispiel der Art behandeln wir noch

Die Familie der Kreise.

Als *eigentliche* Kreise betrachten wir neben den regulären die schon erklärten parabolischen Kreise, jene krummen Linien, die als Grenzfälle regulärer Kreise betrachtet werden können, deren Mittelpunkt auf die uneigentliche Ebene (der projectiven Geometrie) und zwar auf den absoluten Kegelschnitt gerückt und in der Grenzlage natürlich nicht mehr Mittelpunkt ist. Als *uneigentliche Kreise* betrachten wir ferner alle geraden Linien. Die eigentlichen und uneigentlichen Kreise bilden dann zusammen eine einzige natürliche Curvenfamilie, deren Individuen eine analytische Mannigfaltigkeit von zwölf (sechs complexen) Dimensionen bilden. Wir wollen versuchen, ein invariantes System von Differentialgleichungen zu bilden, das für diese Curvenfamilie charakteristisch ist.

Durch unsere bisherige Untersuchung wird ein solches invariantes System von Differentialgleichungen nicht geliefert. Man erkennt hier den Nachtheil, der mit jeder eine vollständige Disjunction herbeiführenden Classification nothwendiger Weise verbunden ist: Es wird durch unsere Methode Zusammengehöriges auseinandergerissen; wir haben die regulären und die singulären (eigentlichen) Kreise durch ganz verschiedene Systeme von Differentialgleichungen charakterisiert. Die für reguläre Kreise charakteristischen Gleichungen

$$(65)\quad (123) \equiv 0 \ \{t\}, \qquad (1|1)(12|13) - 3(1|2)(12|12) \equiv 0 \ \{t\}$$

aber werden keineswegs nur durch die aufgezählten Grenzfiguren, sondern durch sämmtliche ebenen singulären Curven erfüllt.

Um zu einem für die Familie der Kreise charakteristischen invarianten System von Differentialgleichungen zu gelangen, wollen wir etwas weiter ausholen, indem wir zunächst einen leicht zu beweisenden, aber, wie wir glauben, auch sonst nützlichen Lehrsatz anführen.

Wir nennen *Scheitel* zu einem Punkte allgemeiner Lage * einer krummen Linie den Scheitel eines jeden eigentlichen oder uneigentlichen Minimalkegels, der mit der Curve dort eine (mindestens) dreipunktige Berührung eingeht (und also im Falle der regulären oder ebenen singulären Curven den Krümmungskreis enthält). Wir sehen dann:

Zu jedem Punkte allgemeiner Lage irgend einer krummen analytischen Linie gehören zwei in der Regel verschiedene Scheitelpunkte. Der geometrische Ort dieser Scheitel besteht im Allgemeinen aus zwei Minimalcurven, † *die dadurch charakterisiert sind, dass ihre Tangentenflächen die gegebene Curve enthalten. Diese Curven verlaufen, sofern sie existieren, auf der sogenannten Polarfläche, dem Ort der Krümmungsaxen der betrachteten Curve. Sie gehören bei Nicht-Minimalcurven zu der Schaar der Filarevoluten der Curve und können deshalb als deren "uneigentliche Filarevoluten" oder als "Minimalevoluten" bezeichnet werden.*

Die hier gebrauchten Worte "in der Regel" und "im Allgemeinen," denen an und für sich ein klarer Sinn nicht zukommt, werden genau erklärt, wenn wir

* Vergleiche die Definitionen auf Seiten 20, 28, 35.

† Es wird nicht gesagt, dass diese beiden Curven immer von einander verschieden sein müssten. Der genannte Ort ist natürlich durch analytische Fortsetzung zu ergänzen.

die Fälle vollständig aufzählen, in denen ein abweichendes Verhalten eintritt.

Die Ausnahmen des letzten Satzes sind die folgenden:

1) *Bei den krummen Minimallinien fallen beide genannten Oerter mit einander und mit der Curve selbst zusammen.*

2) *Bei jeder doppelt gekrümmten Linie auf einem Minimalkegel erhält man statt der einen Minimalevolute einen eigentlichen Punkt, den Scheitel des zugehörigen Kegels.*

3) *Bei jedem regulären Kreis erhält man entsprechend zwei eigentliche Punkte als Scheitel des Kreises.*

4) *Bei jedem singulären Kreis erhält man ebenso einen eigentlichen und einen uneigentlichen, auf dem absoluten Kegelschnitt gelegenen Punkt.*

5) *Bei den übrigen krummen Linien in Minimalebenen existiert noch eine der uneigentlichen Filarevoluten, während die andere auf den uneigentlichen Scheitel der zugehörigen Minimalebene reduciert ist.*

Indem wir die Ausführung weiterer Einzelheiten dem Leser überlassen, knüpfen wir an die Bemerkung 3) an: Wir bestimmen zunächst bei *regulären* Curven die Scheitelpunkte, und drücken dann aus, dass diese eine im Raume unveränderliche Lage haben.

Bezeichnen wir die beiden Scheitel unterschiedslos mit z^*, so erhalten wir unmittelbar

$$z^* = x + R(\beta \mp i\gamma).* \tag{66}$$

Bezeichnen wir den Vector $z^* - x$ mit δ, so dass $z_k^* - x_k \equiv \delta_k$ $(k = 1, 2, 3)$, so können wir hierfür schreiben

$$(\delta|\omega) = \frac{(1|1)}{(12|12)}[(12|1\omega) \mp i\sqrt{(1|1)}(12\omega)].\dagger \tag{67}$$

Drücken wir sodann aus, dass der Punkt z^* bei Aenderung des Parameterwerthes t in Ruhe bleibt, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$(x'|\omega) + (\delta'|\omega) \equiv 0 \qquad \{t, \omega\}, \tag{68}$$

das, unmittelbar weiter entwickelt, wieder zu den bereits als unbrauchbar erkannten Gleichungen führen würde. Wir sehen aber nunmehr den Grund jener Unbrauchbarkeit: Gehen wir zu dem Grenzfall der krummen Linien in Minimalebenen über, so erscheint immer einer der beiden unter der Bezeichnung δ zusammengefassten Vectoren in der Form $0:0$. Es ist nun aber

$$[(12|1\omega) + i\sqrt{(1|1)}(12\omega)]\,[(12|1\omega) - i\sqrt{(1|1)}(12\omega)]$$
$$\equiv (12|12)(1\omega|1\omega) \qquad \{t, \omega\}.$$

Daher können wir das Gleichungssystem (68), vor dem Grenzübergang, in die Form

---

* Vgl. Nr. 10 und Nr. 11, Seite 21.

† Vgl. ebenda Nr. 6.

$$(69)\qquad (1|\omega)+\frac{d}{dt}\left\{\frac{(1|1)(1\omega|1\omega)}{(12|1\omega)\pm i\sqrt{(1|1)(12\omega)}}\right\}\equiv 0\qquad \{t,\omega\}$$

setzen. Führt man die angezeigte Differentiation aus, und unterdrückt man in den erhaltenen Formeln die Factoren $(1\omega|1\omega)$ und $(1|1)$, von denen der erste überhaupt nicht identisch verschwinden kann, und der zweite nur bei Minimalcurven identisch verschwindet, so kommt man zu dem Gleichungssystem

$$(70)\qquad \begin{aligned}(1|1)(13|1\omega)-3(1|2)(12|1\omega)&\equiv 0,\\ (1|1)(13\omega)-3(1|2)(12\omega)&\equiv 0,\end{aligned}\qquad \{t,\omega\}$$

das, vermöge seiner Ableitung, auf reguläre Curven angewendet, die unter diesen enthaltenen Kreise vollständig charakterisiert. In der That erweisen sich, wenn nur $(1|1)\not\equiv 0$ $\{t\}$ ist, die Gleichungen (65) sofort als in den Gleichungen (70) enthalten. Da aber die Gleichungen (70) offenbar auch durch alle Minimalcurven erfüllt werden, so ist die Gleichung $(123)\equiv 0$ nicht eine Folge von (70); sie muss diesen Gleichungen hinzugefügt werden. Damit werden alle Minimallinien ausgeschlossen, mit Ausnahme der geraden unter ihnen, die unserer Curvenfamilie wirklich angehören. Andrerseits kann die erste der Gleichungen (70) weggelassen werden, da sie schon in der zweiten enthalten ist. Wir sind also nunmehr zu dem Gleichungssystem

$$(71)\qquad (123)\equiv 0\ \{t\},\qquad (1|1)(13\omega)-3(1|2)(12\omega)\equiv 0\ \{t,\omega\}$$

gelangt, und dieses bleibt noch zu untersuchen unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $(12|12)\equiv 0$ hinzutritt. Es kann jetzt angenommen werden, dass $(1|1)\not\equiv 0$ ist. Dann aber reduciert sich die zweite Gleichung (71) auf die in § 5 gefundene $A\equiv 0$ $\{t,\omega\}$, die wir dort als charakteristisch erkannt hatten für die parabolischen Kreise. Ausser diesen kommen dann zu den zuvor gefundenen Lösungen des Systems (71) noch die Euklidischen Geraden, die einzigen Curven, die bei unserer bisherigen Ueberlegung nicht berücksichtigt worden sind. Hiermit ist nachgewiesen:

Die Gleichungen (71) *stellen die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass eine vorgelegte Curve ein eigentlicher oder uneigentlicher Kreis ist.*

Man beachte die Structur des Gleichungssystems (71). Indem wir eine Differential-Covariante identisch verschwinden lassen, haben wir ein System von drei Differentialgleichungen übersichtlich zusammengefasst. Wenn man von regulären Curven ausgeht, kommt man unmittelbar zu der genannten Covariante, wenn man ausdrückt, dass die leicht geometrisch zu deutende absolute Covariante

$$\frac{(12\omega)^2}{(1|1)^3(\omega|\omega)}=\frac{(12\omega)^2}{(12|12)(\omega|\omega)}\cdot\frac{(12|12)}{(1|1)^3}$$

einen constanten Werth hat.

Mit diesen Beispielen wollen wir uns genügen lassen.

Bonn, *im Mai* 1908.